

Über unbedingt konvergente
Differenzenverfahren für hydrodynamische
Gleichungssysteme

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Peter Strauch

aus Aue / Sachsen

1969

Über unbedingt konvergente
Differenzenverfahren für hydrodynamische
Gleichungssysteme

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Peter Strauch

aus Aue / Sachsen

1. Referent : Professor Dr. H. Fortak
2. Referent : Professor Dr. K. Hinkelmann

Tag der mündlichen Prüfung : 15. April 1969

Tag der Promotion :

23. JUNI 1969



Gedruckt im Institut für Theoretische Meteorologie
der Freien Universität Berlin

ZUSAMMENFASSUNG

Die numerische Lösung eines physikalischen Anfangswertproblems stellt bei den bekannten expliziten Differenzenverfahren nur dann eine brauchbare Näherung der exakten Lösung dar, wenn der Abstand aufeinanderfolgender Zeitpunkte relativ zur räumlichen Gittermaschenweite hinreichend klein gewählt wird (bedingte Konvergenz und Stabilität gemäß einem CFL-Kriterium).

In der vorliegenden Arbeit werden nun unbedingt konvergente und stabile explizite Differenzenverfahren (basierend auf Charakteristiken) für folgende Fälle angegeben:

1. für quasilineare hyperbolische Differentialgleichungssysteme in einer Raumdimension (Beweis der unbedingten Stabilität nur für ein hydrodynamisches Beispiel),
2. für die linearisierten Gleichungen einer zweidimensionalen isentropen Strömung mit CORIOLISbeschleunigung (in der numerischen Praxis angesehen als heuristisches Argument für die Anwendbarkeit auch auf die nichtlinearen Gleichungen),
3. für die dreidimensionale Wellengleichung.

Eine abschließende Untersuchung des Truncationerrors der Verfahren führt auf eine (zunächst noch hypothetische) Möglichkeit, für Strömungen vom Typ großräumiger atmosphärischer Bewegungen den Fehler besonders klein zu halten.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

INHALT

1.	EINLEITUNG	1
2.	DEFINITIONEN	4
3.	EIN UNBEDINGT KONVERGENTES DIFFERENZENVERFAHREN FÜR QUASILINEARE HYPERBOLISCHE DIFFERENTIALGLEI- CHUNGSSYSTEME IN ZWEI UNABHÄNGIGEN VARIABLEN	7
3.1	Bezeichnungskonventionen	7
3.2	Problemstellung	7
3.3	Gitter und Differenzengleichungen	9
3.31	Beschreibung des Gitters	9
3.31	Die Differenzengleichungen	9
3.4	Konvergenz des Verfahrens	11
3.41	Vorbemerkungen	11
3.42	Konvergenzbeweis	12
3.5	Konsistenz und Stabilität des Verfahrens	18
4.	UNBEDINGTE KONVERGENZ UND STABILITÄT EINES CHA- RAKTERISTISCHEN DIFFERENZENVERFAHRENS FÜR DIE LINEARISIERTEN GLEICHUNGEN EINER ZWEIDIMENSIONA- LEN KOMPRESSIBLEN ADIABATISCHEN STRÖMUNG	20
4.1	Problemstellung und heuristischer Weg zum Differenzenverfahren	20
4.2	Beschreibung des Differenzenschemas	25
4.3	Konsistenz	29
4.4	Stabilität und Konvergenz	32
4.5	Ergebnis von Kapitel 4	35
5.	EIN UNBEDINGT KONVERGENTES DIFFERENZENVERFAHREN FÜR DIE DREIDIMENSIONALE WELLENGLEICHUNG MIT KONSTANTER PHASENGESCHWINDIGKEIT	36
6.	TRUNCATIONERROR UND AUSBLICK AUF DEN NICHTLINEAREN FALL	39
7.	SCHLUSSBEMERKUNGEN	44
8.	ANHANG	45
	LITERATUR	47
	VERZEICHNIS DER VERWENDETEN SYMBOLE	49

1. EINLEITUNG

Seit der grundlegenden Arbeit von COURANT, FRIEDRICHS und LEWY vom Jahre 1928 [1] ist das Problem der Konvergenz und Stabilität von Differenzenverfahren nach zwei Gesichtspunkten vorangetrieben worden: einmal in Richtung auf die Behandlung möglichst allgemeiner Differentialgleichungssysteme, zum anderen in Richtung auf möglichst allgemeine Differenzenschemata. Ein praktisches Ergebnis derartiger Untersuchungen liegt in der Angabe von Kriterien, nach welchen man für ein vorliegendes Problem optimale Differenzenapproximationen finden kann, d. h. Verfahren, welche mit möglichst wenig Rechenaufwand eine befriedigende Näherung der exakten Lösung liefern.

Bekanntlich gibt es auch heute noch nicht für jedes mathematische Problem eine Rechenanlage, welche schnell genug wäre, um das Problem in einer vernünftigen Zeit zu lösen. Ein Beispiel hierfür bietet die theoretische Meteorologie mit der numerischen Wettervorhersage. Eine vollständige Beschreibung der zeitlichen Entwicklung der meteorologischen Parameter erfordert mindestens fünf partielle Differentialgleichungen¹⁾, das Vorhersagegebiet muß die gesamte dreidimensionale Atmosphäre einschließen, und das Gitter muß horizontal wie vertikal so fein gewählt werden, daß alle meteorologisch wirksamen Strukturen noch erfaßt werden können.

Die "Langsamkeit" der Rechenmaschinen läßt dieses Programm nicht zu, statt dessen können nur Vorhersagemodelle behandelt werden, welche das Gleichungssystem verstümmeln, den Vorhersagebereich begrenzen und dessen (vertikale) Auflösung beschränken.

Die "Rechenzeit für eine Prognose" gewinnt also eine grundsätzliche Bedeutung, und wir wollen sie daher an einem Beispiel präzisieren und diskutieren, für welches die allgemeine Theorie weit genug vorangeschritten ist, nämlich am Beispiel des reinen Anfangswertproblems für ein hyperbolisches System von quasilinearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in zwei unabhängigen Variablen x und t : Seien Prognosezeitraum T und räumliche Maschenweite Δx vorgegeben, dann hängt die Rechenzeit für eine Prognose von zwei Faktoren ab, einmal vom Rechenaufwand für den einzelnen Zeitschritt, zum anderen von der Zahl der benötigten Zeitschritte, d. h. von der Größe des Zeitintervalls Δt .

¹⁾ siehe z. B. [10], p. 14.

Untersucht man nun nach diesen Gesichtspunkten das Verhalten von expliziten und impliziten Differenzenverfahren ¹⁾ - einer ersten groben Klassifikation möglicher Differenzenverfahren folgend -, so scheint zunächst sowohl nach den vorliegenden Einzeluntersuchungen ²⁾ als auch nach den in allgemeineren Untersuchungen diskutierten Beispielen ³⁾, eine generelle Entscheidung zugunsten eines Verfahrenstyps nicht möglich zu sein: explizite Verfahren erfordern weniger Rechenaufwand für den Einzelschritt, unterliegen dagegen hinsichtlich der Wahl von Δt einer Beschränkung nach oben durch das CFL- Kriterium ⁴⁾, implizite Verfahren sind im Einzelschritt aufwendiger, dagegen bei geschickter Formulierung hinsichtlich der Größe von Δt nicht notwendig beschränkt ⁵⁾.

Bei einer solchen Sachlage könnten nun Anliegen und Ergebnis der vorliegenden Untersuchung von Interesse sein: wir werden nämlich explizite Differenzenverfahren angeben, welche unbedingt - also ohne Einschränkung für die Wahl des Zeitschrittes Δt - konvergent und stabil sind.

Nach einer Definition der Begriffe Konsistenz, Konvergenz und Stabilität nach P. LAX werden wir zunächst eine gewisse Modifikation des von COURANT, ISAACSON und REES in [4] untersuchten Differenzenverfahrens für ein hyperbolisches System von quasilinearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in zwei unabhängigen Variablen x und t behandeln. Wie in [4] werden wir die Konvergenz des Verfahrens in der Maximumnorm nur für eine gewisse Umgebung der Anfangskurve zeigen, wobei Beweismethode und Abschätzungstechnik im wesentlichen gegenüber [4] und [5] unverändert bleiben werden. Die Stabilität des Verfahrens werden wir nur für das hydrodynamische Beispiel einer eindimensionalen isentropen Strömung zeigen.

-
- 1) Ein Differenzenverfahren heiße explizit, wenn die Lösungsvektoren zum Folgezeitpunkt nicht durch die Differenzengleichungen untereinander gekoppelt werden, andernfalls heiße es implizit.
 - 2) z. B. [4], [5], [6].
 - 3) z. B. in [2] und [3] für lineare Fälle.
 - 4) Die Differenzenzlösung W konvergiert bei konstantem $r =: \Delta t / \Delta x$ mit $\Delta t \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen die exakte Lösung w , sofern r kleiner als der Kehrwert der absolut genommen größten Charakteristikenneigung ist.
 - 5) Die Interpretation des CFL- Kriteriums als Schranke für Δt bei vorgegebenem endlichen Δx ist allgemein üblich und scheint auch hinlänglich durch numerische Experimente belegt zu sein.

Im Anschluß an diesen Abschnitt werden wir für ein spezielles lineares Differentialgleichungssystem, und zwar für die linearisierte ¹⁾ Form der EULERSchen Gleichungen im System der rotierenden Erde, unter der Annahme von Adiabasis und fehlender Vertikalbewegung, ein Differenzenverfahren angeben, welches in der l_2 - Norm unbedingt konvergent und stabil ist. Obwohl erfahrungsgemäß der Charakteristikenbegriff bei mehrdimensionalen Problemen nur mühsam für Rechenzwecke nutzbar gemacht werden kann, beruht das Verfahren wie im eindimensionalen Falle auf einer angemessenen Berücksichtigung einer Einhüllenden des charakteristischen Kegels. Beweismethode und Abschätzungstechnik werden sich auf eine Arbeit von K. O. FRIEDRICHS [8] stützen.

Hierauf werden wir die Anwendbarkeit des am zweidimensionalen Falle erprobten Konstruktionsprinzips für ein unbedingt konvergentes charakteristisches Differenzenverfahren auf dreidimensionale Probleme am Beispiele der dreidimensionalen Wellengleichung mit konstanter Phasengeschwindigkeit demonstrieren können.

Zum Abschluß werden wir den Truncationerror betrachten und eine Möglichkeit andeuten, wie - für den Preis erhöhten Rechenaufwandes - die absolute Größe (nicht die Ordnung) des Fehlers eines charakteristischen Differenzenverfahrens für die zweidimensionalen Bewegungsgleichungen um eine Größenordnung vermindert werden könnte, sofern die betrachtete Strömung gewisse Charakteristika aufweist, welche z. B. auch für großräumige atmosphärische Bewegungen zutreffen.

¹⁾ Linearisiert heiße: alle Koeffizienten werden als gegebene Funktionen der Raum- und Zeitkoordinaten aufgefaßt.

2. DEFINITIONEN

2.1 Vektornormen

Die von uns betrachteten Differential- bzw. Differenzengleichungssysteme liefern als Lösungen Vektorfunktionen, deren Differenz in einer dem jeweiligen Problem angepaßten Norm abgeschätzt werden muß. Hierfür kommen zwei Definitionen in Betracht:

1. Die Maximumnorm eines Vektors $\mathbf{W}$ wird definiert durch das Maximum der Beträge seiner Komponenten:

$$\|\mathbf{W}\| =: \max_k |\mathbf{W}_k|$$

2. Die l_2 - Norm einer Vektorfunktion $\mathbf{W}(\mathbf{x}, t)$ zur Zeit t wird definiert durch die positive Wurzel des Integrals über das Betragsquadrat der Vektorfunktion, wobei das Integral über den räumlichen Definitionsbereich der Vektorfunktion zu erstrecken ist:

$$\|\mathbf{W}\| =: \sqrt{\int |\mathbf{W}|^2 d\mathbf{x}}$$

Innerhalb einer Untersuchung wird jeweils nur eine Norm Verwendung finden und dann mit dem Symbol $\|\cdot\|$ bezeichnet werden.

2.2 Matrixnorm

Die Norm $\|\mathbf{A}\|$ einer quadratischen symmetrischen Matrix $\mathbf{A}$ wird definiert durch:

$$\|\mathbf{A}\| =: \text{Maximum der Beträge aller Eigenwerte von } \mathbf{A}.$$

$\|\mathbf{A}\|$ ist zur Vektornorm "Betrag" und daher auch zur l_2 - Norm "passend"¹⁾:

$$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{W}| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{W}\| \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{W}\|_{l_2} \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{W}\|_{l_2}.$$

¹⁾ siehe z. B. [15], p. 139.

Hinsichtlich der Definition der folgenden Begriffe stützen wir uns auf die in den Veröffentlichungen von P. LAX, R. RICHTMYER u. a. vertretene Richtung (siehe z. B. [9]).

2.3 Konsistenz, Truncationerror

Ein Differenzenschema

$$W(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \sum_j C_j \cdot W(\mathbf{x} + \Delta_j, t) := \mathbf{F} \cdot W(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

$$(C_j, \Delta_j, \mathbf{F} \text{ sind i. a. Funktionen von } \mathbf{x}, t, \Delta x, \Delta t, W)$$

heißt konsistent mit dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{i=1}^n A_i \cdot \frac{\partial w}{\partial x_i} + B \cdot w, \quad (2.2)$$

wenn für jede hinreichend glatte Lösung w des Anfangswertproblems von (2.2) in einem Intervall

$$0 \leq t \leq T$$

gilt:

$$\left\| \left(\frac{\mathbf{F} - \mathbf{F}}{\Delta t} - \sum_i A_i \frac{\partial}{\partial x_i} - B \right) \cdot w \right\| \rightarrow 0 \quad \text{mit } \Delta t \rightarrow 0, \quad \Delta t / \Delta x = \text{const}, \quad (2.3)$$

wobei die Konvergenz gleichmäßig im Intervall $[0, T]$ sei.

Der Truncationerror von $\mathbf{F}$ ist definiert durch

$$\frac{w(t + \Delta t) - \mathbf{F} \cdot w(t)}{\Delta t}, \quad (2.3a)$$

seine Ordnung durch den Grad des Verschwindens seiner Norm.

(2.3a) stimmt bis auf $O(\Delta t)$ mit dem in (2.3) abzuschätzenden Ausdruck überein, Konsistenz ist also gewährleistet, wenn der Truncationerror mindestens die Ordnung 1 hat. Die Lösung w heißt dann "hinreichend glatt", wenn man sie weit genug nach TAYLOR entwickeln kann, um die Ordnung des Truncationerrors bzw. die Konsistenz des Differenzenverfahrens nachweisen zu können.

2.4 Konvergenz

Die Lösung $W(\mathbf{x}, t)$ der Differenzengleichungen (2.1) zur Anfangsbedingung

$$W(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

konvergiert im Intervall $0 \leq t \leq T$ gegen die Lösung $w(\mathbf{x}, t)$

des Differentialgleichungssystems (2.2) mit den gleichen Anfangsbedingungen, wenn gilt:

$$\|W(t) - w(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{mit } \Delta t \rightarrow 0 \quad , \quad (2.4) \\ \Delta t/\Delta x = \text{const}$$

wobei die Konvergenz gleichmäßig im Intervall $[0, T]$ sei.

2.5 Stabilität

Ein Differenzenschema (2.1) heißt stabil, wenn innerhalb eines gegebenen Zeitintervalls $[0, T]$ die Differenzlösungen W zu vorgegebener Anfangsverteilung $f(x)$ (etwa LIPSCHITZstetig und von endlicher Norm) unabhängig von Δt ($\Delta t/\Delta x = \text{const}$) beschränkt sind. Genauer: es soll ein $\tau > 0$ existieren, so daß gilt:

$$\|W(x, n\Delta t)\| < K(T, \|f(x)\|) \quad \text{für alle } 0 < \Delta t < \tau \quad (2.5). \\ \text{und } 0 \leq n\Delta t \leq T$$

3. EIN UNBEDINGT KONVERGENTES DIFFERENZENVERFAHREN FÜR QUASILINEARE HYPERBOLISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEME IN ZWEI UNABHÄNGIGEN VARIABLEN

3.1 Bezeichnungskonventionen

In diesem Kapitel wird ein System von n Differentialgleichungen für n abhängige Funktionen untersucht. Ein Vektorsymbol (z. B. $\mathbf{U}$) stehe entsprechend immer für eine Zusammenfassung von n indizierten Größen (z. B. u^i , $i = 1, 2, \dots, n$), ein Dyadensymbol (z. B. $\mathbf{G}$) immer für eine Zusammenfassung eines quadratischen Koeffizientenschemas von n^2 indizierten Größen (z. B. g^{ij} ; $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$). Die Norm eines Vektors sei die in Kapitel 2 definierte Maximumnorm, sie werde auch durch einen nicht indizierten lateinischen Buchstaben bezeichnet, z. B. $v \equiv \|\mathbf{v}\|$.

Für die zur Integration der Gleichungen herangezogene Charakteristikenmethode ist eine Komponentendarstellung durchsichtiger als eine Vektordarstellung, es treten entsprechend Summationen auf, welche immer von 1 bis n laufen und in Zweifelsfällen durch den Summationsindex gekennzeichnet werden mögen, z. B.

$$\sum_i^n \equiv \sum_{i=1}^n.$$

Ein nicht durch Summation verbrauchter Index läuft in der Regel von 1 bis n , auch dies werde nur in Zweifelsfällen angegeben.

3.2 Problemstellung

Sei das System von n quasilinearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung für n Funktionen u^i zweier unabhängiger Variabler (t, x)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{G}(t, x, \mathbf{u}) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{e}(t, x, \mathbf{u}) \quad (3.1)$$

in dem Bereich

$$D =: D_T \times D_n$$

mit

$$D_T =: \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T, A \leq x \leq B\}$$

und

$$D_n =: \{\mathbf{U} \mid \|\mathbf{U} - \mathbf{U}_0\| \leq C\}$$

hyperbolisch, d. h., gebe es für jedes $(t, x, \mathbf{U}) \in D$ eine reelle Matrix $\mathbf{A}(t, x, \mathbf{U})$ mit $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, welche $\mathbf{G}$ in eine reelle Diagonalmatrix und das System (3.1) in die äquivalente Normalform

$$\sum_i a^{ji}(t, x, \mathbf{u}) \left[\frac{\partial u^i}{\partial t} + c^j(t, x, \mathbf{u}) \frac{\partial u^i}{\partial x} \right] = b^j(t, x, \mathbf{u}) \quad (3.2a)$$

überführt. Seien ferner in D die a^{ji} , c^j , b^j einmal nach ihren $n+2$

Argumenten differenzierbar, mögen die Ableitungen LIPSCHITZbedingungen der Form

$$|h(t, x, U_1) - h(t, x, U_2)| < K_1 |t_1 - t_2| + K_2 |x_1 - x_2| + K_3 \|U_1 - U_2\|$$

genügen, und sei $M > 0$ eine obere Schranke für alle $|c^j|$ in D .
Seien für ein gewisses Intervall $A < a \leq x \leq b < B$

n Funktionen $f^i(x)$ gegeben, welche einmal nach x differenzierbar seien und deren Ableitungen LIPSCHITZbedingungen genügen mögen.

Gelte hierbei

$$\|f - U_0\| \leq C - 2.$$

Dann gibt es nach [7] ein $0 < \delta \leq T$,
so daß in dem Trapez G_δ , welches
durch die Geraden

$$\begin{aligned} t = 0 & \quad , \quad t = \delta, \\ x = a + Mt & \quad , \quad x = b - Mt \end{aligned}$$



bestimmt wird (Abb. 1), eine eindeutige Lösung $u(t, x)$ existiert, welche

Abb. 1: G_δ bzw. G_{δ_1} ($\operatorname{tg} \varphi = 1/M$)

1. einmal differenzierbar ist, mit LIPSCHITZbedingungen für die Ableitungen, und
2. auf der Anfangskurve die Werte $f(x)$ annimmt, d. h.

$$u^i(0, x) = f^i(x) \quad \text{für} \quad a \leq x \leq b. \quad (3.2b)$$

Wegen der Stetigkeit von u in G_δ können wir δ noch so klein wählen, daß gilt:

$$\|u - U_0\| \leq C - 1. \quad (3.3)$$

In [4] ist nun unter entsprechenden, die Existenz einer eindeutigen Lösung des reinen Anfangswertproblems sichernden Voraussetzungen gezeigt worden, daß in einem gewissen Trapez G_{δ_1} ($0 < \delta_1 \leq \delta$; siehe Abb. 1) die Lösung U eines gewissen expliziten charakteristischen Differenzenverfahrens im limes $\Delta t \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen die exakte Lösung u des Anfangswertproblems (3.2) konvergiert, sofern man nur das Verhältnis der Maschenweiten Δt und Δx konstant bei einem Wert kleiner als eine Zahl von der Größenordnung $1/M$ hält.

In der folgenden Untersuchung soll gezeigt werden, daß es nur einer geringen Modifikation dieses Differenzenverfahrens bedarf, um auch bei beliebig vorgegebenem Verhältnis $\Delta t/\Delta x$ die gleichmäßige Konvergenz der Differenzlösung gegen die exakte Lösung in einem gewissen G_{δ_1} zu sichern.

Beweismethode und Abschätzungstechnik werden sich eng an [4] und [5] anschließen, vieles wird nur der Vollständigkeit halber wiederholt werden müssen.

Unbedingte Konvergenz ist für gewisse charakteristische Differenzenverfahren schon von H. B. KELLER und V. THOMEE in [5] und [6] nachgewiesen worden, allerdings sind die dort diskutierten Verfahren implizit, während unser Verfahren trotz der Modifikation explizit und damit weniger zeitaufwendig bleibt.

3.3 Gitter und Differenzengleichungen

3.31 Beschreibung des Gitters

Nach Vorgabe des Verhältnisses $r =: \Delta t / \Delta x$ von zeitlicher Maschenweite Δt zu räumlicher Maschenweite Δx und eines gewissen $\Delta t < \delta$ (später $\Delta t \rightarrow 0$) seien zunächst diejenigen Punkte von G_δ Gitterpunkte, welche mit den Punkten eines Rechteckgitters der räumlichen Maschenweite $\Delta x =: \Delta t / r$ und der zeitlichen Maschenweite Δt , enthaltend den linken unteren Eckpunkt $(0, a)$ von G_δ , zusammenfallen. Hinzu kommen entsprechende Punkte auf der oberen Randlinie $t = \delta$ (zeitlicher Abstand zur vorletzten Zeile i. a. kleiner als Δt) und die seitlichen Randpunkte auf den Linien

$t = k \Delta t$, $k = 0, 1, \dots, K$ (Abstand zum nächsten räumlich benachbarten Gitterpunkt i. a. kleiner als Δx).

3.32 Die Differenzengleichungen

Die Differenzengleichungen liefern den Lösungsvektor $W(P)$ in einem Gitterpunkt P der $(k+1)$ -ten Zeile als Funktion der Lösungsvektoren $W(Q')$ gewisser Gitterpunkte Q' der k -ten Zeile.



Abb. 2: Stützpunkte Q (bzw. Q^- und Q^+) und R_j (bzw. R_j^- und R_j^+) für die Differenzengleichungen (3.6) im Punkte P .

$CH_j(P)$: Approximation der j -ten Charakteristik im Punkte P .

Hierbei treten auf (siehe Abb. 2):

1. der direkt unter P liegende Punkt $Q(P)$.

Ist P Randpunkt, so fällt $Q(P)$ i. a. nicht auf einen Gitterpunkt. Seien $Q^-(P)$ bzw. $Q^+(P)$ die $Q(P)$ links bzw. rechts benachbarten Gitterpunkte. Dann werde $U(Q)$ durch lineare Interpolation aus $U(Q^-)$ und $U(Q^+)$ definiert:

$$U(Q) =: (1 - \lambda(P)) U(Q^-) + \lambda(P) U(Q^+) \quad (3.4a)$$

mit

$$\lambda(P) =: \frac{x_Q - x_{Q^-}}{x_{Q^+} - x_{Q^-}}, \quad 0 \leq \lambda(P) < 1. \quad (3.4b)$$

2. die Schnittpunkte $R_j(P)$ gewisser Approximationen $CH_j(P)$

$$CH_j(P): \quad x - x_P = c_j(Q, U(Q)) (t - t_P)$$

der Charakteristiken durch P mit der Linie $t = t_k$:

$$x_{R_j} = x_P - \Delta t c_j(Q, U(Q)) \quad (3.5a)$$

Ist $U(Q)$ ein Element von D_n , was wir bei den folgenden Abschätzungen annehmen und später für ein gewisses G_{δ_1} rechtfertigen werden, so liegt

$R_j(P)$ in G_δ , besitzt also links bzw. rechts benachbarte Gitterpunkte $R_j^-(P)$ bzw. $R_j^+(P)$. $U(R_j)$ werde dann durch lineare Interpolation aus $U(R_j^-)$ und $U(R_j^+)$ definiert:

$$U(R_j) =: (1 - \sigma_j(P)) U(R_j^-) + \sigma_j(P) U(R_j^+) \quad (3.5b)$$

mit

$$\sigma_j(P) =: \frac{x_{R_j} - x_{R_j^-}}{x_{R_j^+} - x_{R_j^-}}, \quad 0 \leq \sigma_j(P) < 1. \quad (3.5c)$$

Im weiteren werden wir, wenn keine Mißverständnisse möglich sind, bei $Q(P)$, $\lambda(P)$, $R_j(P)$ und $\sigma_j(P)$ die Kennzeichnung (P) weglassen.

Mit Hilfe der in (3.4) und (3.5) getroffenen Definitionen können wir nun die Differenzenformulierung des Anfangswertproblems (3.2) angeben. Die Differenzengleichungen lauten:

$$\Sigma a^{ji}(Q, U(Q)) [U^i(P) - U^i(R_j)] = \Delta t b^j(Q, U(Q)) \quad (3.6a)$$

mit den Anfangsbedingungen (3.6b)

$$U^i(0, x_m) = f^i(x_m) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \begin{array}{l} x_m: \text{alle Gitterpunkte} \\ \text{auf der Anfangskurve.} \end{array}$$

Die Lösung des Differenzenanfangswertproblems (3.6) ist eindeutig gegeben, sofern $\det [A(Q, U(Q))] \neq 0$

und $R_j \in G_\delta$.

Dies wird am Ende des Konvergenzbeweises für ein gewisses G_{δ_1} durch $U(Q) \in D_n$ gesichert werden.

3.4 Konvergenz des Differenzenverfahrens

3.41 Vorbemerkungen

1. Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf ein Trapez $G_{\delta_1} \subset G_\delta$. $0 < \delta_1 \leq \delta$ sei so gewählt, daß das Differenzenverfahren (3.6) die Lösung U nicht aus dem Geltungsbereich D_n der in Kapitel 3.2 genannten Voraussetzungen über die Funktionen a^{ji} , c^j und b^j herausführt. Der Beweis für Existenz und Größe eines solchen Trapezes wird durch Induktion nach der Zahl der Gitterzeilen $t = \text{const}$ geführt werden, und zwar mit Hilfe derselben Abschätzungen, welche auch die Konvergenz des Differenzenverfahrens liefern werden. Er soll daher am Ende des Konvergenzbeweises nachgetragen werden.

2. Wie üblich bedeute die Schreibweise

$$e(t, x) = O(\Delta^n g_1 g_2 \dots g_l) \quad [(t, x) \in G_{\delta_1} ; g_i : \text{gewisse positive Zahlen}],$$

daß gilt:

$$|e(t, x)| < K \Delta t^n g_1 g_2 \dots g_l \quad ,$$

wobei K eine von (t, x) unabhängige positive Konstante ist. Zum Beispiel ist $\Delta x = O(\Delta)$ wegen $\Delta x / \Delta t = \text{const}$.

3. Sei $\mathbf{U}$ die Lösung des Differenzenanfangswertproblems (3.6), $\mathbf{u}$ die exakte Lösung des Anfangswertproblems (3.2) in G_{δ_1} . Dann seien auf den Gitternetzlinien Funktionen $\hat{\mathbf{U}}$ bzw. $\hat{\mathbf{u}}$ dadurch definiert, daß sie an Gitterpunkten P mit $\mathbf{U}(P)$ bzw. $\mathbf{u}(P)$ übereinstimmen, zwischen benachbarten Gitterpunkten durch lineare Interpolation gewonnen werden sollen. Sei N ein Punkt auf dem Gitternetz, dann liegt $(N, \mathbf{U}(N))$ in D , da D konvex ist, d.h. mit zwei Punkten auch die Punkte der Verbindungsgeraden enthält. Außerdem gilt:

$$\hat{\mathbf{u}}^i(N) = \mathbf{u}^i(N) + O(\Delta^2) \quad (3.7)$$

4. Als Fehlermaße betrachten wir längs Gitternetzlinien die beiden Vektorfunktionen:

$$\mathbf{v}(N) =: \hat{\mathbf{U}}(N) - \hat{\mathbf{u}}(N) \quad (3.8a)$$

und

$$\mathbf{V}^j(N) =: \sum_i a^{ji}(N, \mathbf{u}(N)) \mathbf{v}^i(N) \quad (3.8b)$$

$\mathbf{V}(N)$ und $\mathbf{v}(N)$ hängen wegen $\det(\mathbf{A}(N, \mathbf{u}(N))) \neq 0$ eindeutig miteinander zusammen. Wegen $(N, \mathbf{u}(N)) \in D$, wegen der Stetigkeit von $\mathbf{A}$ und $\det(\mathbf{A})$ in D , sowie wegen $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ in D gilt insbesondere:

$$\mathbf{V}(N) = O(\mathbf{v}(N)) \quad \text{und} \quad \mathbf{v}(N) = O(\mathbf{V}(N)). \quad (3.9)$$

3.42 Konvergenzbeweis

Wir werden zeigen, daß die Differenzenlösung $\mathbf{U}$ von (3.6) im limes

$$\Delta t \rightarrow 0, \quad \Delta t / \Delta x = r = \text{const}$$

in einem gewissen Trapez G_{δ_1} gleichmäßig gegen die Lösung $\mathbf{u}$ von (3.2) konvergiert.

Hierzu sind verschiedene Abschätzungen notwendig, welchen Übergang von der k -ten zur $(k+1)$ -ten Zeitzeile kennzeichnen. Wir machen hierbei von der Annahme Gebrauch, daß für die Gitterpunkte der k -ten Zeile gilt:

$$\mathbf{U}(Q') \in D_n.$$

Aus der LIPSCHITZ stetigkeit der ersten Ableitungen von $\mathbf{u}$ in G_{δ} folgt:

$$\mathbf{u}^i(R_j) = \mathbf{u}^i(P) - \Delta t \left[\frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial t}(P) + c^j(Q, \mathbf{U}(Q)) \frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial x}(P) \right] + O(\Delta^2) \quad (3.10a)$$

Hieraus ergibt sich wegen der LIPSCHITZ stetigkeit der c^j in D , der Beschränktheit von $\frac{\partial u^i}{\partial x}$ in G_δ , sowie wegen (3.9):

$$u^i(R_j) = u^i(P) - \Delta t \left[\frac{\partial u^i}{\partial t}(P) + c^j(P, u(P)) \frac{\partial u^i}{\partial x}(P) \right] + O(\Delta^2) + O(\Delta V(Q)) \quad (3.10b)$$

Damit folgt aus (3.2a):

$$\Sigma a^{ji}(P, u(P)) [u^i(P) - u^i(R_j)] = \Delta t b^j(P, u(P)) + O(\Delta^2) + O(\Delta V(Q)), \quad (3.10c)$$

bzw., wegen (3.7):

$$\Sigma a^{ji}(P, u(P)) [u^i(P) - \hat{u}^i(R_j)] = \Delta t b^j(P, u(P)) + O(\Delta^2) + O(\Delta V(Q)). \quad (3.10d)$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} a^{ji}(P, u(P)) &= a^{ji}(Q, U(Q)) + O(\Delta) + O(V(Q)), \\ b^j(P, u(P)) &= b^j(Q, U(Q)) + O(\Delta) + O(V(Q)), \\ u^i(P) &= \hat{u}^i(R_j) + O(\Delta). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Aus (3.10d) und (3.11) folgt somit:

$$\Sigma a^{ji}(Q, U(Q)) [u^i(P) - \hat{u}^i(R_j)] = \Delta t b^j(Q, U(Q)) + O(\Delta^2) + O(\Delta V(Q)). \quad (3.12)$$

Wir erhalten jetzt durch (3.6a) und (3.12) eine Abschätzung für die Fehlerfunktion Ψ :

$$\begin{aligned} \Sigma a^{ji}(Q, U(Q)) [v^i(P) - v^i(R_j)] &= \Sigma a^{ji}(Q, U(Q)) [U^i(P) - \hat{U}^i(R_j)] \\ &\quad - \Sigma a^{ji}(Q, U(Q)) [u^i(P) - \hat{u}^i(R_j)] \\ &= O(\Delta^2) + O(\Delta V(Q)), \end{aligned} \quad (3.13)$$

und schließlich aus (3.9), (3.11) und (3.13):

$$\begin{aligned}
 V^j(P) - V^j(R_j) &= \sum a^{ji}(P, u(P)) v^i(P) - \sum a^{ji}(R_j, u(R_j)) v^i(R_j) \\
 &= \sum [a^{ji}(P, u(P)) - a^{ji}(Q, U(Q))] v^i(P) + \sum a^{ji}(Q, U(Q)) [v^i(P) - v^i(R_j)] \\
 &\quad + \sum [a^{ji}(Q, U(Q)) - a^{ji}(Q, u(Q))] v^i(R_j) + \sum [a^{ji}(Q, u(Q)) - a^{ji}(R_j, u(R_j))] v^i(R_j) \\
 &= O(\Delta V(P)) + O(V(Q) V(P)) + O(\Delta^2) + O(\Delta V(Q)) + O(V(Q) V(R_j)) + O(\Delta V(R_j)) .
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Wir definieren jetzt als Maß für die Abweichung der Vektoren U von den Vektoren u an den Gitterpunkten der i -ten Zeile eine Größe E_i durch:

$$E_i =: \text{Max} \{ V(t_i, x_1) ; x_1 \text{ durchlaufe alle Gitterpunkte der } i\text{-ten Zeile} \} \tag{3.15}$$

und verwenden sie zunächst zur weiteren Abschätzung der rechten Seite von (3.14):

a) Sei P Randpunkt, dann ist

$$\begin{aligned}
 v^i(Q) &= (1 - \lambda(P)) v^i(Q^-) + \lambda(P) v^i(Q^+) , \\
 a^{ji}(Q, u(Q)) &= a^{ji}(Q^-, u(Q^-)) + O(\Delta) = a^{ji}(Q^+, u(Q^+)) + O(\Delta) .
 \end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
 V^S(Q) &= \sum a^{si}(Q, u(Q)) v^i(Q) \\
 &= (1 - \lambda(P)) \sum a^{si}(Q, u(Q)) v^i(Q^-) + \lambda(P) \sum a^{si}(Q, u(Q)) v^i(Q^+) \\
 &= (1 - \lambda(P)) V^S(Q^-) + \lambda(P) V^S(Q^+) + O(\Delta V(Q^-)) + O(\Delta V(Q^+)) .
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$V(Q) \leq (1 - \lambda(P)) V(Q^-) + \lambda(P) V(Q^+) + O(\Delta V(Q^-)) + O(\Delta V(Q^+)) ,$$

und schließlich wegen (3.15):

$$V(Q) \leq E_k + O(\Delta E_k) . \tag{3.16}$$

b) Eine analoge Abschätzung für $V(R_j)$ ergibt:

$$\begin{aligned} V^S(R_j) &= \sum a^{Si}(R_j, u(R_j)) v^i(R_j) \\ &= (1 - \sigma_j) \sum a^{Si}(R_j, u(R_j)) v^i(R_j^-) + \sigma_j \sum a^{Si}(R_j, u(R_j)) v^i(R_j^+) \\ &= (1 - \sigma_j) V^S(R_j^-) + \sigma_j V^S(R_j^+) + O(\Delta V(R_j^-)) + O(\Delta V(R_j^+)) \end{aligned} \quad (3.17a)$$

Hieraus folgt:

$$V(R_j) \leq E_k + O(\Delta E_k). \quad (3.17b)$$

Für alle Gitterpunkte P der $k+1$ -ten Zeile und alle $R_j(P)$ gilt also wegen (3.14), (3.16) und (3.17b):

$$V^j(P) = V^j(R_j) + O(\Delta E_{k+1} + E_k E_{k+1} + \Delta^2 + \Delta E_k + E_k^2 + \Delta E_k^2), \quad (3.18)$$

oder, wegen

$$\Delta < \delta, \quad \text{d. h.} \quad E_k^2 + \Delta E_k^2 = O(E_k^2)$$

und (3.17a):

$$V^j(P) = (1 - \sigma_j) V^j(R_j^-) + \sigma_j V^j(R_j^+) + O(\Delta E_{k+1} + E_k E_{k+1} + \Delta^2 + \Delta E_k + E_k^2) \quad (3.19)$$

Nach Definition (3.15) der E_1 gibt es ein P' und ein j' , so daß

$$E_{k+1} = V(P') = |V^{j'}(P')|. \quad (3.20)$$

Andererseits ist nach (3.19):

$$V^{j'}(P') = (1 - \sigma_{j'}) V^{j'}(R_{j'}^-) + \sigma_{j'} V^{j'}(R_{j'}^+) + O(\Delta E_{k+1} + E_k E_{k+1} + \Delta^2 + \Delta E_k + E_k^2),$$

woraus schließlich folgt:

$$E_{k+1} \leq E_k + O(\Delta E_{k+1} + E_k E_{k+1} + \Delta^2 + \Delta E_k + E_k^2). \quad (3.21)$$

Es gibt somit eine positive Konstante γ , so daß gilt:

$$E_{k+1} \leq E_k + \frac{\gamma}{2} (\Delta + E_k) (2\Delta + E_k + E_{k+1}) \quad \text{für } k \geq 0. \quad (3.22a)$$

Nach (3.2b), (3.6b) und (3.15) gilt außerdem: $E_0 = 0.$ (3.22b)

In [4] wird auf Seite 251 gezeigt, daß aus einer Folge (3.22) von Ungleichungen für $0 \leq k \leq k'$ die Ungleichung

$$E_k < 3\Delta \quad \text{für } 0 \leq k \leq k'+1 \quad (3.23)$$

folgt, sofern die Ungleichung

$$k\Delta \leq \frac{1}{2\gamma} \quad \text{für } k \leq k'+1 \quad (3.24)$$

beachtet wird. Wählen wir jetzt

$$\delta_1 =: \text{Min}\left(\frac{1}{2\gamma}, \delta\right), \quad (3.25)$$

so gilt somit für alle $t_k \leq \delta_1$ und alle Gitterpunkte (t_k, x_1) :

$$|V^j(t_k, x_1)| \leq E_k < 3\Delta, \quad (3.26)$$

woraus wegen $v = O(V)$ in G_δ , insbesondere in G_{δ_1} , folgt:

$$|U^j(t_k, x_1) - u^j(t_k, x_1)| \leq v(t_k, x_1) < A\Delta. \quad (A = \text{const} > 0)$$

Die Lösung U von (3.6) konvergiert also in G_{δ_1} gleichmäßig mit

$$\Delta t \rightarrow 0, \quad \Delta t / \Delta x = r = \text{beliebige Konstante}$$

gegen die Lösung u des Anfangswertproblems (3.2), sofern die Voraussetzung

$$U \in D_n, \quad \text{für alle Gitterpunkte innerhalb } G_{\delta_1}$$

verifiziert werden kann.

Dieser noch ausstehende Beweis erfolgt durch Induktion nach der Nummer k' der Zeilen $t = t_{k'}$: Nach der Anfangsbedingung (3.6b) ist $U(0, x_1) \in D_n$. Sei für $k \leq k'$ $U(t_k, x_1) \in D_n$. Dann folgt gemäß dem Konvergenzbeweis:

$$E_{k+1} \leq E_k + \frac{\gamma}{2} (\Delta + E_k) (2\Delta + E_k + E_{k+1}) \quad \text{für } 0 \leq k \leq k'.$$

Hieraus folgt nach dem oben zitierten Ergebnis aus [4]:

$$E_k < 3\Delta \quad \text{für } k \leq k'+1, \text{ d. h. insbesondere: } E_{k'+1} < 3\Delta,$$

d. h.
$$\|U(t_{k'+1}, x_1) - u(t_{k'+1}, x_1)\| < A\Delta.$$

Wählen wir jetzt noch $\Delta < 1/2A$, so ist nach (3.3)

$$\|U(t_{k'+1}, x_1) - U_0\| < C - 1/2,$$

d. h. $U(t_{k'+1}, x_1)$ liegt ebenfalls in D_n .

Wir wollen noch zwei Bemerkungen über die Größe von G_{δ_1} machen:

1. Wie in [4] ist auch hier der Beweis nicht mit dem Bestreben geführt worden, einen möglichst großen Konvergenzbereich anzugeben.

2. δ_1 hängt, wie in [4], nicht nur von gewissen, durch die allgemeinen Voraussetzungen des Anfangswertproblems (3.2) gegebenen, Konstanten, sondern auch noch von dem vorgegebenen Verhältnis $r = \Delta t / \Delta x$ ab. Da jedoch eine Vergrößerung von r eine Verkleinerung des Verhältnisses $\Delta x / \Delta t$ mit sich bringt und auf den rechten Seiten der verschiedenen Ungleichungen des Konvergenzbeweises Δx gegenüber Δt abgeschätzt wird, kann mit zunehmendem r die Konstante γ in (3.22a) höchstens kleiner, d. h. δ_1 kann nach (3.25) höchstens größer werden. In einem Trapez G_{δ_1} , in welchem gemäß der Beweismethode von [4] das explizite Verfahren 1 von [4] mit einem Verhältnis $\Delta t / \Delta x = r'$ konvergiert, konvergieren erst recht die hier betrachteten expliziten Verfahren mit $r > r'$, insbesondere also diejenigen Verfahren, deren Maschenweitenverhältnis im Widerspruch zu dem bekannten Kriterium von COURANT, FRIEDRICHS und LEWY steht.

3.5 Konsistenz und Stabilität des Verfahrens

Von der Konsistenz des Verfahrens wurde schon im Konvergenzbeweis Gebrauch gemacht, sie ist in Gleichung (3.12) enthalten. Einen direkten Beweis der Stabilität des Verfahrens in der Maximumnorm können wir nicht für das allgemeine quasilineare System (3.1) sondern nur für ein hydrodynamisches Beispiel vorlegen.

Wir betrachten die Gleichungen einer eindimensionalen isentropen Strömung mit räumlich konstanter spezifischer Entropie s_0 , wobei wir noch äußere Kräfte zulassen wollen. Wegen der Annahme der Adiabase reduzieren sich diese Gleichungen auf Bewegungsgleichung und Kontinuitätsgleichung für Geschwindigkeit u und Dichte ρ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= K(x, t, u, \rho) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\text{mit } c^2 = c^2(\rho) = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = c_0^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1}.$$

Hierbei ist $c(\rho)$ die Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von ρ ,

$$c_0 = c(\rho_0), \quad \gamma = c_p / c_v.$$

Führen wir hier c anstelle ρ als thermodynamische Variable ein, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{\gamma-1} c \frac{\partial c}{\partial x} &= K \\ \frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} \right) + c \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Die charakteristische Gleichungsform erhalten wir durch Addition bzw. Subtraktion der Gleichungen (3.28):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{\gamma-1} \left[\frac{\partial c}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial c}{\partial x} \right] &= K \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{\gamma-1} \left[\frac{\partial c}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial c}{\partial x} \right] &= K \end{aligned} \quad (3.29)$$

bzw. , mit

$$u_1 = u + \frac{2}{\gamma-1} c, \quad u_2 = u - \frac{2}{\gamma-1} c,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial u_1}{\partial x} = K$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial u_2}{\partial x} = K.$$
(3.30)

Die charakteristischen Differenzengleichungen zu (3.30) lauten in den Bezeichnungen von 3.32 (mit $\mathbb{U} = (U_1, U_2)$):

$$U_1(P) = U_1(R_1) + K(Q, \mathbb{U}(Q)) \Delta t$$

$$U_2(P) = U_2(R_2) + K(Q, \mathbb{U}(Q)) \Delta t$$
(3.31)

Die Stabilität von (3.31) lässt sich unmittelbar zeigen:

Sei E_k das Maximum von $\|\mathbb{U}\|$ in der k -ten Gitterlinie, sei M eine Schranke für $|K|$ für $\|\mathbb{U}\| \leq L$, gelte ferner für die Anfangswerte $\mathbb{U}_0$: $\|\mathbb{U}_0\| \leq L/2$. Dann ist für jedes $0 < n\Delta t < L/2M$ die Lösung $\mathbb{U}(n\Delta t)$ von (3.31) gleichmäßig in Δt beschränkt.

Der Beweis erfolgt durch Induktion nach n bei festem Δt :

Gelte für alle $k' \leq k$: $E_{k'} \leq L$,

dann folgt aus (3.31):

$$E_{k+1} \leq E_k + M \Delta t \leq E_0 + (k+1) \Delta t M \leq E_0 + \frac{L}{2M} M \leq \frac{L}{2} + \frac{L}{2} = L.$$

Die Induktion ist wegen $E_0 \leq L/2$ vollständig.

Hiermit ist die Stabilität des Differenzenschemas (3.31) bewiesen. Der Beweis lässt sich ohne weiteres auf eine Klasse von hyperbolischen Differentialgleichungssysteme erweitern, und zwar auf Systeme der Form (3.2a) mit konstantem $\mathbb{A}$. Man hat dann lediglich statt u den Vektor $\mathbb{A} \cdot \mathbf{u}$ zu betrachten. Der Beweis gilt sogar dann noch, wenn $\mathbb{A}$ nicht von $\mathbf{u}$, sondern nur von x und t abhängt. In diesem Falle ergibt sich bei Umschreibung der Gleichungen in $\mathbb{A} \cdot \mathbf{u}$ ein Zusatz auf der rechten Seite, welcher keine Ableitungen von $\mathbf{u}$ enthält und somit nur wie eine zusätzliche Kraft K' wirkt.

4. UNBEDINGTE KONVERGENZ UND STABILITÄT EINES CHARAKTERISTISCHEN DIFFERENZENVERFAHRENS FÜR DIE LINEARISIERTEN GLEICHUNGEN EINER ZWEIDIMENSIONALEN KOMPRESSIBLEN ADIABATISCHEN STRÖMUNG

4.1 Problemstellung und heuristischer Weg zum Differenzenverfahren

Wir betrachten im folgenden die sogenannten primitiven Gleichungen der Meteorologie unter der Annahme von Adiabasie, horizontal konstanter spezifischer Entropie, Vernachlässigbarkeit der Reibung und Vernachlässigbarkeit der Vertikalgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial l}{\partial x} &= f v \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + c \frac{\partial l}{\partial y} &= -f u \\ \frac{\partial l}{\partial t} + u \frac{\partial l}{\partial x} + v \frac{\partial l}{\partial y} + c \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Hierbei sind u, v die horizontalen Windkomponenten in x - bzw. y - Richtung, c die Schallgeschwindigkeit, welche hier die Rolle einer thermodynamischen Variablen einnimmt, $f = f(\mathbf{x})$ ist der CORIOLISparameter,

$$l = \frac{2}{\gamma - 1} c_p \quad , \quad \gamma = c_p / c_v .$$

Die Umschreibung der horizontalen Bewegungsgleichung und der Kontinuitätsgleichung auf die Form (4.1) ist schon in Kapitel 3.5 erläutert worden.

Das Ziel unserer Untersuchung ist es, für das reine Anfangswertproblem von (4.1) ein Differenzenschema zu finden, welches unbedingt konvergent und stabil ist. Unser Leitbild hierfür bildet die Charakteristikenidee, auch wenn die Situation gegenüber dem eindimensionalen Falle (Kapitel 3) grundsätzlich verschieden ist: während dort genau so viele charakteristische Richtungen auftreten (eventuell bei mehrfacher Zählung) wie Gleichungen vorhanden sind, und bei der charakteristischen Form des Systems jede Gleichung nur eine einzige Differentiationsrichtung, nämlich in Richtung der jeweiligen Charakteristik, aufweist, ergibt sich in dem zweidimensionalen Falle (4.1) als charakteristisches Gebilde ein Kegel, d. h. eine einparametrische Schar sogenannter Bicharakteristiken, und es ist in diesem Falle nicht möglich, das System so umzuformen, daß in jeder Gleichung nur eine einzige Differentiationsrichtung vorkommt. Genau hierauf beruhte aber der Erfolg der in Kapitel 3 verwendeten Abschätzungstechnik.

Trotzdem ist die Charakteristikenidee schon zur Konstruktion von Differenzenschemata bei mehrdimensionalen Problemen herangezogen worden. Schon 1954 untersuchten K. HINKELMANN und R. SCHWARZENBERGER [10] die Anwendbarkeit charakteristischer Differenzenverfahren auf verschiedene meteorologische Gleichungssysteme. Ihre Verfahren lassen sich aber für unsere Zielsetzung nicht übernehmen, da sie nach Konstruktion von vornherein eine Schranke für Δt im Sinne eines CFL - Kriteriums beachten. Weitere Beispiele sind das Bicharakteristikenverfahren von R. SCHÄTZ [14] und das sogenannte Nebencharakteristikenverfahren von R. SAUER [11]. Während im ersteren Verfahren die Gleichungen auf eine Form mit möglichst wenig Differentiationsrichtungen gebracht werden, wobei sich die zeitartigen Richtungen gerade als gewisse Bicharakteristiken erweisen, führt R. SAUER die charakteristische Transformation der Gleichungen hinsichtlich einer räumlichen Richtung (etwa der x - Richtung) durch und erreicht damit, daß wenigstens die Ableitungen nach t und x in jeder Gleichung in jeweils derselben Weise kombiniert erscheinen. In den genannten Arbeiten werden Stabilität und Konvergenz dieser Verfahren nicht systematisch untersucht, R. SCHÄTZ beachtet jedoch bei seinen numerischen Beispielen das CFL - Kriterium, und auch R. SAUER macht ausdrücklich ([11], p. 62) Einschränkungen im gleichen Sinne.

Wir wollen hier einen anderen Weg einschlagen, und zwar werden wir uns zunächst orientieren an den Kriterien für das Verhältnis $\Delta t / \Delta x$, welche für den Fall konstanter Koeffizienten für gewöhnliche explizite Differenzenverfahren hergeleitet werden können. Daraufhin werden wir die Vorschrift für $\Delta t / \Delta x$ uminterpretieren in eine Vorschrift, in welchem Abstand $\Delta(\Delta t)$ vom Achsenschnittpunkt des charakteristischen Kegels im Punkte $(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ mit der t - Ebene bei nunmehr beliebigem Δx Stützpunkte eines Differenzenverfahrens zu wählen sind (mit linearer Interpolation der Funktionswerte aus den umgebenden Gitterwerten).

Bei dieser heuristischen Einführung werden wir also in (4.1) die Faktoren u , v , c konstant gleich $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{c}$ setzen und mit $\bar{u} = 0$, $\bar{v} = 0$ die Achse des charakteristischen Kegels in die t - Richtung bringen, außerdem werden wir von der CORIOLISKraft absehen. Wir betrachten also das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{c} \frac{\partial l}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{c} \frac{\partial l}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial l}{\partial t} + \bar{c} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Das charakteristische Gebilde dieses hyperbolischen Differentialgleichungssystems besteht aus der t - Richtung und einem Kreiskegel um diese

Richtung als Achse, wobei die Steigung der Mantellinien (Bicharakteristiken) durch $1/\bar{c}$ bestimmt wird.

In [3], pp. 192 - 193, wurde gezeigt, daß das folgende 4 - Punkte - Differenzenverfahren (siehe Abb. 3a):

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &\Rightarrow \frac{w(\mathbf{x}, t + \Delta t) - (w_1 + w_2 + w_3 + w_4) / 4}{\Delta t} \\ \frac{\partial w}{\partial x} &\Rightarrow \frac{w_1 - w_3}{2 \Delta x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &\Rightarrow \frac{w_2 - w_4}{2 \Delta x} \quad (w_i \equiv w(P_i))\end{aligned} \quad (4.3)$$

in der l_2 - Norm, welche wir im weiteren betrachten werden, konvergent und stabil ist, wenn gilt:

$$\Delta t / \Delta x \leq 1 / 2\bar{c}, \quad (4.4)$$

d. h., wenn der Radius des Kreises um P_0 durch die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 mindestens doppelt so groß ist wie der Radius des Schnittkreises des charakteristischen Kegels im Punkte $(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ mit der t - Ebene.

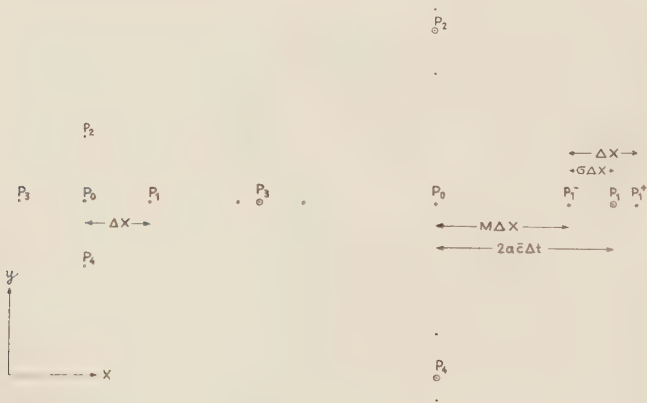


Abb. 3: a) 4-Punkte-Schema für (4.3). b) Modifiziertes 4-Punkte-Schema für (4.5) mit 8 Stützpunkten.

Aus diesem Ergebnis leiten wir die folgende Vermutung ab:
Werden bei vorgegebenen Δx und Δt die Gitterpunkte P_1, P_2, P_3 und P_4 ersetzt durch entsprechende Punkte im Abstände $a 2 \bar{c} \Delta t$ ($a = \text{const} \geq 1$) von P_0 , und werden die Funktionswerte W_i an diesen Punkten P_i bestimmt durch lineare Interpolation aus den den P_i benachbarten Gitterpunkten, so ist das (4.3) entsprechende 8 - Punkte - Differenzenverfahren (siehe Abb. 3b) ebenfalls, und zwar jetzt unbedingt, konvergent und stabil.

Wir werden zunächst das eben skizzierte Differenzenschema aufstellen und anschließend seine Konvergenz und Stabilität beweisen.
Sei

$$M =: \left[\frac{a 2 \bar{c} \Delta t}{\Delta x} \right], \quad \sigma =: \frac{a 2 \bar{c} \Delta t}{\Delta x} - M,$$

seien P_i^- bzw. P_i^+ der linke bzw. rechte Gitterpunktnachbar von P_i , sei

$$\hat{W}_i =: (1 - \sigma) W(P_i^-) + \sigma W(P_i^+),$$

dann lautet das "charakteristische" Differenzenschema zu (4.2) in Analogie zu (4.3):

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, t + \Delta t) &= \frac{1}{4} (\hat{L}_1 + \hat{L}_2 + \hat{L}_3 + \hat{L}_4) - \frac{1}{4a} (\hat{U}_1 - \hat{U}_3 + \hat{V}_2 - \hat{V}_4) \\ U(\mathbf{x}, t + \Delta t) &= \frac{1}{4} (\hat{U}_1 + \hat{U}_2 + \hat{U}_3 + \hat{U}_4) - \frac{1}{4a} (\hat{L}_1 - \hat{L}_3) \\ V(\mathbf{x}, t + \Delta t) &= \frac{1}{4} (\hat{V}_1 + \hat{V}_2 + \hat{V}_3 + \hat{V}_4) - \frac{1}{4a} (\hat{L}_2 - \hat{L}_4) \end{aligned} \quad (4.5)$$

In Vektorschreibweise ($\mathbf{W} =: \begin{pmatrix} L \\ U \\ V \end{pmatrix}$) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\mathbf{x}, t + \Delta t) &= \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4a & 0 \\ -1/4a & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \hat{\mathbf{W}}_1 + \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & -1/4a \\ 0 & 1/4 & 0 \\ -1/4a & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \hat{\mathbf{W}}_2 \\ &+ \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4a & 0 \\ 1/4a & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \hat{\mathbf{W}}_3 + \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4a \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4a & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \hat{\mathbf{W}}_4 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Der Konvergenz- bzw. Stabilitätsbeweis von (4.7) erfolgt mit Hilfe der sogenannten Verstärkungsmatrix. Die Verstärkungsmatrix $G(\xi)$ eines Differenzenschemas

$$W(x, t + \Delta t) = \sum_j B_j \cdot W(x + \Delta_j, t)$$

ist definiert durch:

$$G(\xi) =: \sum_j B_j \exp[i \Delta_j \cdot \xi / \Delta x] . \quad (4.7)$$

P. LAX gibt in [3], p. 187, ein Kriterium an, welches besagt, daß ein Differenzenschema konvergiert, wenn es konsistent ist und die Eigenwerte seiner Verstärkungsmatrix $G(\xi)$ für beliebige reelle ξ dem Betrage nach den Wert 1 nicht überschreiten. Das Kriterium geht auf J. v. NEUMANN zurück und sichert auch die Stabilität des Differenzenschemas.

Wir bilden jetzt die Verstärkungsmatrix $G(\xi)$ ($\xi = \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}$) des Differenzenschemas (4.6). Gemäß Definition (4.7) erhalten wir:

$$G(\xi) = \begin{pmatrix} \alpha & -i\beta & -i\gamma \\ -i\beta & \alpha & 0 \\ -i\gamma & 0 & \alpha \end{pmatrix} , \quad (4.8)$$

mit den Abkürzungen:

$$\alpha = \frac{1}{2} (1 - \sigma) \cos M\zeta + \frac{1}{2} \sigma \cos (M+1)\zeta + \frac{1}{2} (1 - \sigma) \cos M\eta + \frac{1}{2} \sigma \cos (M+1)\eta$$

$$\beta = \frac{1}{2a} (1 - \sigma) \sin M\zeta + \frac{1}{2a} \sigma \sin (M+1)\zeta$$

$$\gamma = \frac{1}{2a} (1 - \sigma) \sin M\eta + \frac{1}{2a} \sigma \sin (M+1)\eta$$

Die Eigenwertgleichung von $G(\xi)$

$$(\alpha - \lambda) [(\alpha - \lambda)^2 + \beta^2 + \gamma^2] = 0$$

hat die drei Lösungen

$$\lambda_1 = \alpha , \quad \lambda_{2,3} = \alpha \pm i \sqrt{(\beta^2 + \gamma^2)} .$$

Für die Beträge der Eigenwerte gilt die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1^2 &\leq |\lambda_{2,3}|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \leq \alpha^2 + a^2(\beta^2 + \gamma^2) \\
 &= \frac{1}{4}[(1-\sigma)^2 + \sigma^2 + 2\sigma(1-\sigma)\cos\zeta] + \frac{1}{4}[(1-\sigma)^2 + \sigma^2 + 2\sigma(1-\sigma)\cos\eta] \\
 &\quad + \frac{1}{2}[(1-\sigma)\cos M\zeta + \sigma\cos(M+1)\zeta][(1-\sigma)\cos M\eta + \sigma\cos(M+1)\eta] \\
 &\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1.
 \end{aligned}$$

Die Eigenwerte λ_1 der Verstärkungsmatrix (4.8) sind also für beliebige reelle ζ und η dem Betrage nach nicht größer als 1. Da außerdem das Verfahren (4.6) mit dem Differentialgleichungssystem (4.2) konsistent ist (der Beweis in der l_2 -Norm verläuft im Prinzip genauso wie in Kapitel 4.3 für das kompliziertere System (4.11)), ist das charakteristische Differenzenverfahren (4.6) konvergent und stabil. Da außerdem keine Bedingung für M oder σ in den Beweis einging, sind Konvergenz und Stabilität von (4.6) tatsächlich unbedingt.

Die Verallgemeinerung des Verfahrens (4.6) auf den Fall eines geneigten und variablen charakteristischen Kegels (den Fall der Gleichungen (4.1)) liegt auf der Hand: man approximiere Neigung und Öffnungswinkel des charakteristischen Kegels im Punkte $(\mathbf{x}, t+\Delta t)$ durch die im Punkte $(\mathbf{x}, t)$ berechneten Werte und lege entsprechend dem berechneten Öffnungswinkel die Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 um den Schnittpunkt der so berechneten Kegelachse mit der t -Ebene. Obwohl wir glauben, daß ein solches Verfahren auch für die nichtlinearen Gleichungen (4.1) erfolgreich ist, können wir vorerst Konvergenz und Stabilität nur für den Fall variabler, aber als Funktion von $\mathbf{x}$ und t gegebener Koeffizienten beweisen. Dieser Beweis wird den Inhalt der nächsten Abschnitte bilden.

4.2 Beschreibung des Differenzenschemas

Wir betrachten die linearisierten Gleichungen (4.1) - Koeffizienten u, v, c werden durch gegebene Funktionen $\bar{u}, \bar{v}, \bar{c}$ von x, y und t mit $\bar{c} > 0$ ersetzt - in Vektorform:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \mathbf{A}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \mathbf{A}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{w} \quad (4.9)$$

Hierbei sind:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -\bar{u} & -\bar{c} & 0 \\ -\bar{c} & -\bar{u} & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{u} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -\bar{v} & 0 & -\bar{c} \\ 0 & -\bar{v} & 0 \\ -\bar{c} & 0 & -\bar{v} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & -f & 0 \end{pmatrix}.$$

Seien ferner ein quadratisches räumliches Gitter der Maschenweite Δx , die zeitliche Schrittweite Δt und eine Konstante $a \geq 1$ gegeben. Sei für Raumpunkte, welche nicht auf Gitterpunkte fallen, $\hat{W}$ durch lineare Interpolation aus den W an den räumlich benachbarten Gitterpunkten definiert, seien einem Gitterpunkt $(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ in Analogie zu Kapitel 4.3 (siehe auch Abb. 4) als Stützpunkte eines charakteristischen Differenzenverfahrens die Punkte P_0, P_1, P_2, P_3 und P_4 der t -Ebene

wie folgt zugeordnet:

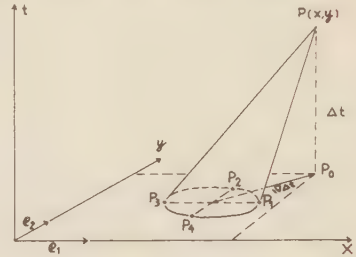


Abb. 4: Charakteristischer Kegel von (4.9) und Stützpunkte P_i des Differenzenverfahrens (4.11).

$$P_0: \mathbf{x}$$

$$P_1: \mathbf{x} - \bar{u}(\mathbf{x}, t) \Delta t \mathbf{e}_1 - \bar{v}(\mathbf{x}, t) \Delta t \mathbf{e}_2 + 2a \bar{c}(\mathbf{x}, t) \Delta t \mathbf{e}_1$$

$$P_2: \mathbf{x} - \bar{u}(\mathbf{x}, t) \Delta t \mathbf{e}_1 - \bar{v}(\mathbf{x}, t) \Delta t \mathbf{e}_2 + 2a \bar{c}(\mathbf{x}, t) \Delta t \mathbf{e}_2 \quad (4.10)$$

$$P_3: \mathbf{x} - \bar{u}(\mathbf{x}, t) \Delta t \mathbf{e}_1 - \bar{v}(\mathbf{x}, t) \Delta t \mathbf{e}_2 - 2a \bar{c}(\mathbf{x}, t) \Delta t \mathbf{e}_1$$

$$P_4: \mathbf{x} - \bar{u}(\mathbf{x}, t) \Delta t \mathbf{e}_1 - \bar{v}(\mathbf{x}, t) \Delta t \mathbf{e}_2 - 2a \bar{c}(\mathbf{x}, t) \Delta t \mathbf{e}_2$$

Dann lautet (mit $\hat{W}_1 = \hat{W}(P_1)$) das zu (4.6) analoge Differenzenschema für (4.9):

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}, t + \Delta t) = & \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4a & 0 \\ -1/4a & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \hat{W}_1 + \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & -1/4a \\ 0 & 1/4 & 0 \\ -1/4a & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \hat{W}_2 \\ & + \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4a & 0 \\ 1/4a & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \hat{W}_3 + \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4a \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4a & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \hat{W}_4 \\ & + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(\mathbf{x}) \\ 0 & -f(\mathbf{x}) & 0 \end{pmatrix} \cdot W_0 \Delta t \end{aligned} \quad (4.11)$$

Hierbei wurde der CORIOLISterm auf der rechten Seite von (4.9) approximiert durch seinen Wert im Punkte P_0 .

Während in der Form (4.11) des Differenzenschemas Idee und Handhabung des Charakteristikenverfahrens am deutlichsten werden - die zur Berechnung von $W(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ hinzuzuziehenden Gitterpunkte der t -Ebene werden entsprechend der Lage des Schnittkreises einer Approximation des charakteristischen Kegels in $(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ mit der t -Ebene ausgewählt -, empfiehlt es sich, für den Beweis von Konsistenz, Stabilität und Konvergenz das Verfahren in dem konventionellen Bild darzustellen, daß nämlich der Vektor $W(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ zu gewinnen ist aus einer Linearkombination von Vektorwerten W über einer von $(\mathbf{x}, t)$ unabhängigen, konstanten Menge von Nachbarnpunkten von $(\mathbf{x}, t)$.

Sei im folgenden $r =: \Delta t / \Delta x$ beliebig, aber fest, vorgegeben. Seien im Zeitintervall $0 \leq t \leq T$ die Funktionen $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{c}$ hinsichtlich x und y gleichmäßig LIPSCHITZ stetig, sei

$$M_1 =: \max \{ r (|\bar{u}| + 2a\bar{c}), r (|\bar{v}| + 2a\bar{c}) \mid 0 \leq t \leq T \} + 1,$$

sei M die kleinste ganze Zahl $\leq M_1$. Dann läßt sich (4.11) für $0 \leq t \leq T$ auch schreiben in der Form:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}, t + \Delta t) &= \sum_{i,j=-M}^{+M} \sum_{l=1}^4 \sigma_{ij}^l(\mathbf{x}, t) B_l \cdot W(\mathbf{x} + i \Delta x \mathbf{e}_1 + j \Delta x \mathbf{e}_2, t) \\ &\quad + \Delta t B_0 \cdot W(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (4.12)$$

mit

$$\begin{aligned} B_1 &= \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4a & 0 \\ -1/4a & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & -1/4a \\ 0 & 1/4 & 0 \\ -1/4a & 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \\ B_3 &= \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4a & 0 \\ 1/4a & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4a \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4a & 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \\ B_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(\mathbf{x}) \\ 0 & -f(\mathbf{x}) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.13)$$

und

$$\begin{aligned} & (1 - |f_1^1(\mathbf{x}, t) - i|) (1 - |f_2^1(\mathbf{x}, t) - j|) \quad \text{für} \quad |f_1^1(\mathbf{x}, t) - i| < 1 \\ & \sigma_{ij}^1(\mathbf{x}, t) = \quad \quad \quad \wedge \quad |f_2^1(\mathbf{x}, t) - j| < 1 \\ & 0 \quad \quad \quad \text{sonst.} \quad (4.14) \end{aligned}$$

Hierbei sind

$$\begin{aligned} f_1^1(\mathbf{x}, t) &= r(-\bar{u}(\mathbf{x}, t) + 2a\bar{c}(\mathbf{x}, t)) \\ f_2^1(\mathbf{x}, t) &= -r\bar{v}(\mathbf{x}, t) \\ f_1^2(\mathbf{x}, t) &= -r\bar{u}(\mathbf{x}, t) \\ f_2^2(\mathbf{x}, t) &= r(-\bar{v}(\mathbf{x}, t) + 2a\bar{c}(\mathbf{x}, t)) \\ f_1^3(\mathbf{x}, t) &= -r(\bar{u}(\mathbf{x}, t) + 2a\bar{c}(\mathbf{x}, t)) \\ f_2^3(\mathbf{x}, t) &= -r\bar{v}(\mathbf{x}, t) \\ f_1^4(\mathbf{x}, t) &= -r\bar{u}(\mathbf{x}, t) \\ f_2^4(\mathbf{x}, t) &= -r(\bar{v}(\mathbf{x}, t) + 2a\bar{c}(\mathbf{x}, t)). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Folgende Eigenschaften der σ_{ij}^1 und der B_1 sind für die folgenden Beweise von Bedeutung:

$$1. \quad 0 \leq \sigma_{ij}^1(\mathbf{x}, t) \leq 1 \quad \text{für alle } i, j, l \text{ und } \mathbf{x}, t. \quad (4.16)$$

$$2. \quad \sum_{i,j} \sigma_{ij}^1(\mathbf{x}, t) = 1 \quad \text{für alle } l \text{ und } \mathbf{x}, t. \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \sum_{i,j} i \sigma_{ij}^1(\mathbf{x}, t) &= f_1^1(\mathbf{x}, t), \quad \sum_{i,j} j \sigma_{ij}^1(\mathbf{x}, t) = f_2^1(\mathbf{x}, t) \\ &\text{für alle } l \text{ und } \mathbf{x}, t. \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\underline{4.} \quad \sum_{l=1}^4 \mathbf{B}_l = \mathbf{E} \quad (4.19)$$

5. Die Matrizen $\mathbf{B}_l$ ($l = 1, 2, 3, 4$) haben die Eigenwerte $1/4$, $1/4 + 1/4a$, $1/4 - 1/4a$. Wegen $a \geq 1$ sind daher die $\mathbf{B}_l$ nichtnegativ. Außerdem gilt: $\|\mathbf{B}_1\| \leq 1/2$. (4.20)

6. Die $\sigma_{ij}^l(\mathbf{x}, t)$ sind für alle i, j, l im Zeitintervall $0 \leq t \leq T$ gleichmäßig LIPSCHITZstetig hinsichtlich $\mathbf{x}$, wobei ihre gemeinsame LIPSCHITZkonstante K_σ mit der gemeinsamen LIPSCHITZkonstanten K_f der Funktionen $f_i^l(\mathbf{x}, t)$ wie folgt zusammenhängt: (4.21)

$$K_\sigma = 2 K_f.$$

Der Beweis dieser Eigenschaften ist nicht schwer, höchstens mühsam. (4.17) und (4.18) überlegt man sich am besten durch Umdenken auf die Form (4.11) des Differenzenschemas, (4.18) besagt, daß lineare Interpolation eines Entfernungsvektors den Entfernungsvektor reproduziert. Der Beweis von (4.21) ist im Anhang dargestellt.

4.3 Konsistenz

Der Konsistenzbeweis eines Differenzenverfahrens arbeitet mit TAYLORentwicklung und Abschätzung von Restgliedern. Diese Abschätzung ist in der Maximumnorm jedem Hörer einer Analysisvorlesung geläufig, in der l_2 -Norm dagegen nicht unbedingt. Wir wollen sie daher hier durchführen.

Wir betrachten im folgenden nur Lösungen der Differentialgleichungen (4.9), welche zweimal stetig nach ihren Argumenten (x, y, t) differenzierbar und bis zu den zweiten Ableitungen quadratisch integrierbar seien. Die TAYLORentwicklung einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f(t)$ mit Restglied erster Ordnung in Integraldarstellung lautet bekanntlich:

$$f(t + \xi) = f(t) + \xi f'(t) + \int_0^\xi (\xi - \tau) f''(t + \tau) d\tau. \quad (4.22)$$

Für eine Funktion $f(x, y)$ ergibt sich :

$$\begin{aligned} f(x+r, y+s) &= f(x, y) + r \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + s \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ &+ \int_0^r (r-\tau) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x+\tau, y) d\tau + s \int_0^r \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x+\tau, y) d\tau \\ &+ \int_0^s (s-\tau) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x+r, y+\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.23)$$

Das Restglied läßt sich leicht auf konstante Integrationsgrenzen umschreiben:

$$\begin{aligned} R_1(x, y, r, s) &= r^2 \int_0^1 (1-\tau) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x+\tau r, y) d\tau + r s \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x+\tau r, y) d\tau \\ &+ s^2 \int_0^1 (1-\tau) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x+r, y+\tau s) d\tau \end{aligned} \quad (4.24)$$

Unter der Annahme, daß r und s konstant sind, schätzen wir die l_2 - Norm der Glieder auf der rechten Seite von (4.24) einzeln ab. So gilt z. B. für das letzte Glied:

$$\begin{aligned} &\left\| s^2 \int_0^1 d\tau (1-\tau) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x+r, y+\tau s) \right\|^2 \\ &\leq s^4 \int_0^1 d\tau (1-\tau) \int_0^1 d\tau' (1-\tau') \left| \int dx dy \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x+r, y+\tau s) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x+r, y+\tau' s) \right| \\ &\leq s^4 \int_0^1 d\tau (1-\tau) \int_0^1 d\tau' (1-\tau') \sqrt{\int dx dy \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x+r, y+\tau s) \right]^2 \int dx dy \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x+r, y+\tau' s) \right]^2} \\ &= s^4 \int_0^1 d\tau (1-\tau) \int_0^1 d\tau' (1-\tau') \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right\|^2 = \frac{s^4}{4} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right\|^2 \end{aligned}$$

Bei der Abschätzung des zweiten Gliedes von (4.24) fehlt der Faktor $1/4$, da der Faktor $(1 - \tau)$ im Integral fehlt, es folgt also für die Norm von R_1 die Abschätzung:

$$\| R_1(x, y, r, s) \| \leq \frac{1}{2} (r^2 \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\| + 2rs \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right\| + s^2 \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right\|)$$

Für eine Vektorfunktion $\mathbf{f}(x, y)$ ergibt sich analog:

$$\| \mathbf{R}_1(x, y, r, s) \| \leq \frac{1}{2} (r^2 \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2} \right\| + 2rs \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x \partial y} \right\| + s^2 \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial y^2} \right\|) \quad (4.25)$$

Sei $\mathbb{T}$ der Differenzenoperator von (4.12), seien A_i die Matrizen des Differentialoperators (4.9). Dann sieht man unter Verwendung von (4.20) und (4.21) auf elementare Weise, daß in dem Ausdruck

$$\left[\frac{\mathbb{T} - \mathbb{E}}{\Delta t} - A_1 \frac{\partial}{\partial x} - A_2 \frac{\partial}{\partial y} - A_3 \right] \cdot \mathbf{u}$$

bei TAYLORentwicklung der Funktionswerte $\mathbf{u}(\mathbf{x} + i\Delta x \mathbf{e}_1 + j\Delta x \mathbf{e}_2, t)$ nach der Abweichung von $(\mathbf{x}, t)$ nur die Restglieder erster Ordnung übrig bleiben. Diese lassen sich mit Hilfe von (4.25) leicht abschätzen, wenn man beachtet, daß wegen

$$\sigma_{ij}^1(\mathbf{x}, t) \leq 1$$

und

$$\| \mathbb{B}_1 \| \leq 1/2$$

gilt:

$$\| \sigma_{ij}^1 \mathbb{B}_1 \cdot \mathbf{R}_1 \| < \| \mathbf{R}_1 \|.$$

Es folgt also:

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\frac{\mathbb{T} - \mathbb{E}}{\Delta t} - A_1 \frac{\partial}{\partial x} - A_2 \frac{\partial}{\partial y} - A_3 \right) \cdot \mathbf{u} \right\| \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left\| \sum_{i,j=-M}^M \sum_{l=1}^4 \sigma_{ij}^1(\mathbf{x}, t) \mathbb{B}_1 \cdot \mathbf{R}_1(x, y, i\Delta x, j\Delta x) \right\| < \frac{4}{\Delta t} \sum_{i,j=-M}^M \left\| \mathbf{R}_1(x, y, i\Delta x, j\Delta x) \right\| \\ &\leq \frac{2(2M+1)^2 \Delta x^2}{\Delta t} \left(\left\| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} \right\| + 2 \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x \partial y} \right\| + \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} \right\| \right) = O(\Delta t). \end{aligned}$$

Damit ist die Konsistenz des Differenzenverfahrens (4.11) bzw. (4.12) mit dem Differentialgleichungssystem (4.9) in der l_2 - Norm bewiesen.

4.4 Stabilität und Konvergenz

Das Differenzenschema (4.12) ist im Intervall $0 \leq t \leq T$ von der Form

$$W(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \sum_{v=1}^{N(T)} D_v(\mathbf{x}, t) \cdot W(\mathbf{x} + \Delta t \mathbf{x}_v, t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & -f & 0 \end{pmatrix} \cdot W(\mathbf{x}, t) \Delta t, \quad (4.26)$$

wobei gemäß (4.16) - (4.21) gilt:

1. $D_v(\mathbf{x}, t)$ sind nichtnegative symmetrische Matrizen
mit $\|D_v(\mathbf{x}, t)\| \leq 1/2$ für alle v und $(\mathbf{x}, t)$. (4.27)

2. $D_v(\mathbf{x}, t)$ sind LIPSCHITZ stetig in dem Sinne
 $\|D_v(\mathbf{x}_1, t) - D_v(\mathbf{x}_2, t)\| \leq K_1(T) \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$ für alle v . (4.28)

3. $\sum_{v=1}^{N(T)} D_v(\mathbf{x}, t) = E$ für alle $(\mathbf{x}, t)$. (4.29)

Für Differenzenverfahren dieses Typs gibt es eine sehr durchsichtige Theorie der Konvergenz und Stabilität, welche auf K. O. FRIEDRICHS [8] zurückgeht. Da das Ergebnis von FRIEDRICHS meistens nur für den Spezialfall zeitunabhängiger Koeffizienten D_v zitiert wird und im übrigen nur mit einiger Sachkenntnis aus seiner sehr v umfangreichen Untersuchung über die Existenz der Lösung gewisser sachgemäß gestellter Anfangs- und Anfangs-Randwertprobleme für gewisse symmetrische hyperbolische Differentialgleichungssysteme extrahiert werden kann, sollen im folgenden die Beweise für Stabilität und Konvergenz des Differenzenverfahrens (4.26) wiederholt werden. Nach P. LAX würde es im übrigen schon genügen, Konsistenz und Stabilität zu zeigen, weil hieraus für lineare Probleme die Konvergenz folgt. Der Beweis dieses Äquivalenzsatzes ist meines Wissens aber auch nur für den Spezialfall zeitunabhängiger linearer Operatoren veröffentlicht worden (siehe z. B [9], pp. 39 ff.; auf p. 40 wird erwähnt, daß P. LAX den Beweis des Äquivalenzsatzes 1953 in einem Seminar auch für zeitabhängige lineare Operatoren geführt hat).

Wir beweisen also den folgenden Satz von K. O. FRIEDRICHS:

Satz: Ein Differenzenschema der Form (4.26), welches den Bedingungen (4.27) - (4.29) genügt, ist in der l_2 - Norm stabil. Es ist auch konvergent, sofern es mit dem vorliegenden Differentialgleichungssystem konsistent ist.

Beweis:

A. Stabilität

Wir schätzen zuerst die Norm der Summe auf der rechten Seite von (4.26) ab: Für eine symmetrische nichtnegative Matrix $\mathbb{D}$ gilt:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{v} \leq \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{v} \quad \text{für beliebige Vektoren } \mathbf{u} \text{ und } \mathbf{v}.$$

Hieraus folgt mit $\Sigma \mathbb{D}_v = \mathbb{E}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \Sigma \mathbb{D}_v \cdot \mathbf{u}_v &= \Sigma \mathbf{v} \cdot \mathbb{D}_v \cdot \mathbf{u}_v \leq \frac{1}{2} \Sigma \mathbf{v} \cdot \mathbb{D}_v \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \Sigma \mathbf{u}_v \cdot \mathbb{D}_v \cdot \mathbf{u}_v \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \Sigma \mathbf{u}_v \cdot \mathbb{D}_v \cdot \mathbf{u}_v. \end{aligned}$$

Setzen wir jetzt $\mathbf{v} = \Sigma \mathbb{D}_v \cdot \mathbf{u}_v$, so erhalten wir die Abschätzung

$$\left| \Sigma \mathbb{D}_v \cdot \mathbf{u}_v \right|^2 \leq \Sigma \mathbf{u}_v \cdot \mathbb{D}_v \cdot \mathbf{u}_v \quad \text{für beliebige Vektoren } \mathbf{u}_v.$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{v=1}^{N(T)} \mathbb{D}_v \cdot \mathbf{W}_v \right\|^2 &= \int dx dy \left| \Sigma \mathbb{D}_v \cdot \mathbf{W}_v \right|^2 \\ &\leq \Sigma \int dx dy \mathbf{W}(\mathbf{x} + \Delta t \mathbf{x}_v, t) \cdot \mathbb{D}_v(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{W}(\mathbf{x} + \Delta t \mathbf{x}_v, t) \\ &= \Sigma \int dx dy \mathbf{W}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbb{D}_v(\mathbf{x} - \Delta t \mathbf{x}_v, t) \cdot \mathbf{W}(\mathbf{x}, t) \\ &= \Sigma \int dx dy \mathbf{W}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbb{D}_v(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{W}(\mathbf{x}, t) \\ &\quad + \Sigma_{v=1}^{N(T)} \int dx dy \mathbf{W}(\mathbf{x}, t) \cdot [\mathbb{D}_v(\mathbf{x} - \Delta t \mathbf{x}_v, t) - \mathbb{D}_v(\mathbf{x}, t)] \cdot \mathbf{W}(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \| \mathbf{W}(t) \|^2 + N(T) K_1(T) \max\{ |\mathbf{x}_v| \} \Delta t \| \mathbf{W}(t) \|^2 \\ &= \| \mathbf{W}(t) \|^2 (1 + N(T) K_1(T) \max\{ |\mathbf{x}_v| \} \Delta t), \end{aligned}$$

bzw.

$$\left\| \sum_{v=1}^{N(T)} \mathbf{D}_v \cdot \mathbf{W}_v \right\| \leq \| \mathbf{W}(t) \| (1 + S(T) \Delta t) \quad (4.30)$$

mit einem gewissen $S(T)$.

Der zweite Term in (4.26) läßt sich unmittelbar abschätzen:

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} f \Delta t \cdot \mathbf{W}(t) \right\| \leq \max\{ |f| \} \Delta t \| \mathbf{W}(t) \| \quad (4.31)$$

Insgesamt ergibt sich also aus (4.30) und (4.31) für (4.26):

$$\| \mathbf{W}(t + \Delta t) \| \leq \| \mathbf{W}(t) \| (1 + K(T) \Delta t) \quad (4.32)$$

mit einem gewissen $K(T)$.

Hieraus folgt für alle $t < T$ und alle $n \Delta t = t < T$ (Δt beliebiger Teiler von t)

$$\| \mathbf{W}(n \Delta t) \| \leq \| \mathbf{W}(0) \| (1 + K(T) \frac{t}{n})^n \leq \| \mathbf{W}(0) \| e^{K(T)t} < \| \mathbf{W}(0) \| e^{K(T)T}.$$

Damit ist die Stabilität von (4.26) bewiesen.

B. Konvergenz

Sei im Intervall $0 \leq t \leq T$ $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ eine zweimal stetig differenzierbare Lösung des mit dem Differenzensystem (4.26) konsistenten Differentialgleichungssystems (4.9) zu gegebenen Anfangswerten, sei $\mathbf{W}(\mathbf{x}, n \Delta t)$ die entsprechende Differenzlösung von (4.26) bei vorgegebenem $r =: \Delta t / \Delta x$ und vorgegebenem Δt , sei $\mathbb{T}$ der Differenzenoperator von (4.26).

Als Lösung von (4.9) erfüllt $\mathbf{w}$ die Bedingung

$$\| \mathbf{w}(t + \Delta t) - \mathbf{w}(t) - \Delta t \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(t) \| = O(\Delta^2).$$

Man beweist diese Abschätzung in der l_2 -Norm unter Verwendung der Restglieddarstellung (4.22).

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \| \mathbf{W}(t + \Delta t) - \mathbf{w}(t + \Delta t) \| &\leq \| \mathbb{F} \cdot \mathbf{W}(t) - \mathbf{w}(t) - \Delta t \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \| + O(\Delta^2) \\ &\leq \| \mathbb{F} \cdot (\mathbf{W}(t) - \mathbf{w}(t)) \| + \| (\mathbb{F} - \mathbb{E}) \cdot \mathbf{w}(t) - \Delta t \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \| + O(\Delta^2). \quad (4.33) \end{aligned}$$

Der erste Summand von (4.33) ist im Verlaufe des Stabilitätsbeweises mit $\mathbf{W}(t)$ statt $\mathbf{W}(t) - \mathbf{w}(t)$ abgeschätzt worden. Da bei der Abschätzung nur von den Eigenschaften von $\mathbb{F}$ und nicht von den Eigenschaften von $\mathbf{W}$ Gebrauch gemacht wurde, folgt also in Analogie zu (4.32):

$$\| \mathbb{F} \cdot (\mathbf{W}(t) - \mathbf{w}(t)) \| \leq \| \mathbf{W}(t) - \mathbf{w}(t) \| (1 + K(T) \Delta t).$$

Der zweite Summand von (4.33) ist gerade die Norm des mit Δt multiplizierten Truncationerrors und ist wegen der Konsistenz $O(\Delta^2)$. Die Abschätzung (4.33) läßt sich also (mit einem gewissen $H(T)$) fortsetzen zu

$$\| \mathbf{W}(t + \Delta t) - \mathbf{w}(t + \Delta t) \| \leq \| \mathbf{W}(t) - \mathbf{w}(t) \| (1 + K(T) \Delta t) + H(T) \Delta t^2$$

Hieraus folgt für beliebige $n\Delta t < T$ durch Induktion nach n bei festem Δt :

$$\| \mathbf{W}(n\Delta t) - \mathbf{w}(n\Delta t) \| \leq H(T) \Delta t^2 \sum_{\nu=0}^{n-1} (1 + K(T) \Delta t)^\nu = \frac{H}{K} \Delta t [(1 + K \Delta t)^n - 1]$$

$$< \frac{H}{K} \Delta t (1 + K \Delta t)^n < \frac{H}{K} \Delta t (1 + K T/n)^n < \frac{H(T)}{K(T)} e^{K(T) T} \Delta t.$$

Dies bedeutet aber genau die in Δt gleichmäßige Konvergenz der Differenzenlösung $\mathbf{W}$ gegen die exakte Lösung $\mathbf{w}$.

4.5 Ergebnis von Kapitel 4

Wir haben in Kapitel 4 Konsistenz, unbedingte Konvergenz und unbedingte Stabilität eines "charakteristischen Differenzenverfahrens" für ein lineares Differentialgleichungssystem (mit variablen Koeffizienten) in zwei Raumkoordinaten und der Zeit bewiesen. Da der Beweis einer von K. O. FRIEDRICHS für konventionelle Verfahren entwickelten Methode folgen konnte, bestand die eigentliche Beweisidee darin, das charakteristische Verfahren als konventionelles Verfahren zu verkleiden und eine der Voraussetzungen der Methode, nämlich LIPSCHITZ stetigkeit der Koeffizienten, nachzuweisen. Im folgenden Kapitel werden wir am Beispiel der dreidimensionalen Wellengleichung demonstrieren, daß das Konstruktionsprinzip für ein unbedingt konvergentes Differenzenverfahren auch auf höherdimensionale Probleme erweiterbar ist.

5. EIN UNBEDINGT KONVERGENTES DIFFERENZENVERFAHREN FÜR DIE DREIDIMENSIONALE WELLENGLEICHUNG MIT KONSTANTER PHASENGESCHWINDIGKEIT

Die dreidimensionale Wellengleichung (mit $c = 1$)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.1)$$

ist mittels der Zuordnung

$$w_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad w_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad w_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w_4 = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

dem linearen hyperbolischen Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_3}{\partial y} - \frac{\partial w_4}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{\partial w_1}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial w_3}{\partial t} - \frac{\partial w_1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial w_4}{\partial t} - \frac{\partial w_1}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

äquivalent.

Hinsichtlich des Ansatzes eines charakteristischen Differenzenverfahrens orientieren wir uns wieder an einem gewöhnlichen Differenzenverfahren. Nach [3], pp. 192 - 193, konvergiert ein explizites 6 - Punkte - Verfahren mit den Differenzennäherungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &\rightarrow \frac{w(\mathbf{x} + \Delta x \mathbf{e}_1, t) - w(\mathbf{x} - \Delta x \mathbf{e}_1, t)}{2 \Delta x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &\rightarrow \frac{w(\mathbf{x} + \Delta x \mathbf{e}_2, t) - w(\mathbf{x} - \Delta x \mathbf{e}_2, t)}{2 \Delta x} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &\rightarrow \frac{w(\mathbf{x} + \Delta x \mathbf{e}_3, t) - w(\mathbf{x} - \Delta x \mathbf{e}_3, t)}{2 \Delta x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &\rightarrow \left\{ w(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 [w(\mathbf{x} + \Delta x \mathbf{e}_i, t) + w(\mathbf{x} - \Delta x \mathbf{e}_i, t)] \right\} / \Delta t \end{aligned} \quad (5.3)$$

sofern die Bedingung
beachtet wird.

$$\Delta t / \Delta x < 1/3$$

Die charakteristische Umdeutung dieses Ergebnisses erfolgt in Analogie zu Kapitel 4 (siehe Abb. 5): Sei $r =: \Delta t / \Delta x$ beliebig, aber fest vorgegeben, sei Δt vorgegeben, sei a eine Konstante größer oder gleich 1. Seien $M = [3ar]$, $\sigma = 3ar - M$, seien, wie in Abbildung 5 skizziert, die Nachbarpunkte von x im Abstände $3a\Delta t$ mit $P_1, P_2, \dots, P_6$ bezeichnet, sei w der Vektor mit den Komponenten w_1, w_2, w_3, w_4 , sei $\hat{W}_i$ definiert als lineare Interpolation von W an den Nachbargitterpunkten von P_i , z. B.:

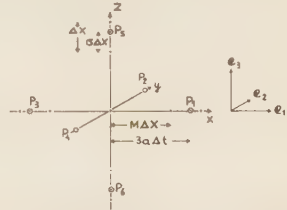


Abb. 5: Stützpunkte des Verfahrens (5.4).

$$\hat{W}_1 = (1 - \sigma) W(x + M \Delta x e_1, t) + \sigma W(x + (M+1) \Delta x e_1, t) .$$

Dann lautet in Analogie zu (4.7) das charakteristische Differenzenverfahren zum System (5.2):

$$\begin{aligned} W(x, t + \Delta t) = & \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6a & 0 & 0 \\ 1/6a & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \cdot \hat{W}_1 + \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 1/6a & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 1/6a & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \cdot \hat{W}_2 \\ & + \begin{pmatrix} 1/6 & -1/6a & 0 & 0 \\ -1/6a & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \cdot \hat{W}_3 + \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & -1/6a & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ -1/6a & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \cdot \hat{W}_4 \\ & + \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 1/6a \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 1/6a & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \cdot \hat{W}_5 + \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 & -1/6a \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ -1/6a & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \cdot \hat{W}_6 \end{aligned} \quad (5.4)$$

(5.4) hat die Verstärkungsmatrix

$$\mathbb{G}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{pmatrix} \alpha & i\beta & i\gamma & i\delta \\ i\beta & \alpha & 0 & 0 \\ i\gamma & 0 & \alpha & 0 \\ i\delta & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{3}(1 - \sigma) \cos M\xi + \frac{1}{3}\sigma \cos (M+1)\xi + \frac{1}{3}(1 - \sigma) \cos M\eta \\ &+ \frac{1}{3}\sigma \cos (M+1)\eta + \frac{1}{3}(1 - \sigma) \cos M\zeta + \frac{1}{3}\sigma \cos (M+1)\zeta \\ \beta &= \frac{1}{3a}(1 - \sigma) \sin M\xi + \frac{1}{3a}\sigma \sin (M+1)\xi \\ \gamma &= \frac{1}{3a}(1 - \sigma) \sin M\eta + \frac{1}{3a}\sigma \sin (M+1)\eta \\ \delta &= \frac{1}{3a}(1 - \sigma) \sin M\zeta + \frac{1}{3a}\sigma \sin (M+1)\zeta. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Die Eigenwerte von $\mathbb{G}(\xi, \eta, \zeta)$ sind:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 = \alpha \\ \lambda_{3,4} &= \alpha \pm i\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2} \end{aligned}$$

Für die Beträge der Eigenwerte folgt die Abschätzung:

$$\begin{aligned} |\lambda_1|^2 &= |\lambda_2|^2 \leq |\lambda_{3,4}|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \leq \alpha^2 + a^2(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) \\ &= \frac{1}{9}[(1 - \sigma)^2 + \sigma^2 + 2\sigma(1 - \sigma)\cos\xi] + \frac{1}{9}[(1 - \sigma)^2 + \sigma^2 + 2\sigma(1 - \sigma)\cos\eta] \\ &+ \frac{1}{9}[(1 - \sigma)^2 + \sigma^2 + 2\sigma(1 - \sigma)\cos\zeta] \\ &+ \frac{2}{9}[(1 - \sigma)\cos M\xi + \sigma\cos(M+1)\xi][(1 - \sigma)\cos M\eta + \sigma\cos(M+1)\eta] \\ &+ \frac{2}{9}[(1 - \sigma)\cos M\xi + \sigma\cos(M+1)\xi][(1 - \sigma)\cos M\zeta + \sigma\cos(M+1)\zeta] \\ &+ \frac{2}{9}[(1 - \sigma)\cos M\eta + \sigma\cos(M+1)\eta][(1 - \sigma)\cos M\zeta + \sigma\cos(M+1)\zeta] \leq 1. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Die Eigenwerte der Verstärkungsmatrix $G(\xi, \eta, \zeta)$ sind also für jedes reelle Wertetripel (ξ, η, ζ) dem Betrage nach nicht größer als 1, woraus nach dem in [3], p. 187, genannten Kriterium Konvergenz und Stabilität des Differenzenverfahrens (5.4) folgen. Die Konsistenz von (5.4) mit (5.2) beweist man analog zu Kapitel 4.3. Da für die Abschätzung (5.7) M und σ keiner Einschränkung unterliegen, sind Konvergenz und Stabilität von (5.4) unbedingt.

6. TRUNCATIONERROR UND AUSBLICK AUF DEN NICHTLINEAREN FALL

Wir haben am Ende von Kapitel 4.1 ein allgemeines Konstruktionsprinzip für charakteristische Differenzenverfahren in mehrdimensionalen Räumen aufgestellt, welches auch auf nichtlineare Differentialgleichungssysteme wie das System (4.1) angewandt werden kann. Während wir die Brauchbarkeit eines solchen Verfahrens für die linearisierten Gleichungen (4.1) mit Hilfe einer hierauf zugeschnittenen Theorie von K. O. FRIEDRICHS zeigen konnten, fehlt vorerst eine auf den nichtlinearen Fall anwendbare Theorie¹⁾, und wir sind hier zunächst auf numerische Experimente (welche für die nächste Zeit geplant sind) und gewisse in der Praxis bewährte heuristische Kriterien angewiesen, welche von R. RICHTMEYER in [9], p. 91, wie folgt beschrieben werden: man prüft die Stabilität des linearisierten Differenzenschemas und leitet aus dessen Stabilität eine gewisse Evidenz für die Stabilität des nichtlinearen Schemas her. Von diesem heuristischen Argument her sind also nach dem Ergebnis von Kapitel 4 unbedingte Konvergenz und Stabilität eines charakteristischen Differenzenverfahrens für die nichtlinearen Gleichungen (4.1) nicht unwahrscheinlich. In der Regel prüft man sogar noch etwas

¹⁾STRANG zeigt allerdings in [12], daß ein konsistenter Differenzenoperator für ein nichtlineares hyperbolisches Differentialgleichungssystem erster Ordnung konvergent ist, sofern die sogenannte erste Variation des Operators in der l_2 -Norm stabil ist und die exakte Lösung, die Koeffizienten des Differentialgleichungssystems sowie der Differenzenoperator hinreichend oft nach ihren Argumenten stetig differenzierbar sind. Im Falle des von uns betrachteten Differenzenoperators stimmt die erste Variation mit der linearisierten Form (4.12) überein (die σ_{ij}^1 sind mit den Werten der exakten Lösung zu nehmen), sie ist also l_2 -stabil. Dagegen sind die σ_{ij}^1 nur LIPSCHITZ stetig und nicht überall differenzierbar. Der Satz von STRANG läßt sich also nicht ohne weiteres auf unser Problem anwenden.

weniger, nämlich die Stabilität des linearisierten Differenzenschemas mit konstanten Koeffizienten, z. B. untersucht R. RICHTMYER in [9], pp. 361-364, das bekannte LAX - WENDROFF - Verfahren für die nichtlinearen zweidimensionalen hydrodynamischen Gleichungen auf der Grundlage der Theorie für lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten. Es scheint also nicht abwegig zu sein, wenn wir vorerst die Anwendbarkeit des charakteristischen Differenzenverfahrens auf den nichtlinearen Fall unterstellen und den Truncationerror eines solchen Verfahrens untersuchen.

Zunächst betrachten wir den (in Kapitel 3 gesicherten) eindimensionalen Fall am Beispiel der Gleichungen einer eindimensionalen isentropen Strömung (3.28) mit $\gamma = 1.4$ und $K = 0$.

Das Differenzenverfahren (3.31), hier wieder mit $\mathbf{T}$ bezeichnet, ergibt für einen Lösungsvektor $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} c \\ u \end{pmatrix}$ einen Truncationerror erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \mathbf{T} \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\Delta t^2}{2} \begin{pmatrix} 6cc_x^2 + 0.24cu_x^2 + 2.4uc_xu_x \\ 10uc_x^2 + 2uu_x^2 + 12cc_xu_x \end{pmatrix} \\ &+ \frac{\Delta x^2}{2} \begin{pmatrix} \sigma_1(1-\sigma_1)(0.5c_{xx} + 0.1u_{xx}) + \sigma_2(1-\sigma_2)(0.5c_{xx} - 0.1u_{xx}) \\ \sigma_1(1-\sigma_1)(2.5c_{xx} + 0.5u_{xx}) - \sigma_2(1-\sigma_2)(2.5c_{xx} - 0.5u_{xx}) \end{pmatrix} + O(\Delta^3) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Hier und im folgenden sei eine Ableitung nach x bzw. t durch einen Index x bzw. t bezeichnet. σ_1 und σ_2 ($0 \leq \sigma_1 < 1$, $0 \leq \sigma_2 < 1$) sind die Abstände der Charakteristikenfußpunkte R_1 und R_2 von ihren linken Gitterpunktnachbarn in Einheiten Δx , sie oszillieren bei festem Δx mit wachsendem Δt , d.h. wandernden R_1 , periodisch zwischen 0 und 1, ihre Abhängigkeit von Δt kann also bei einer Größenordnungsbetrachtung vernachlässigt werden. Somit wird bei festem Δx und wachsendem Δt der Fehler im wesentlichen durch den ersten, Δt^2 proportionalen, Term in (6.1) bestimmt. Seine Form - quadratisch in ersten Ableitungen anstelle linear in zweiten Ableitungen - ergibt sich durch successive Anwendung der Differentialgleichungen (3.28), welche $\mathbf{w}$ als Lösung haben sollen. Sind nun u und die Schwankungen von c klein gegen c (wie bei großräumigen atmosphärischen Bewegungen), so ist der Term quadratisch in kleinen Größen. Zum Vergleich hierzu ist der Truncationerror eines gewöhnlichen Differenzenverfahrens $\mathbf{T}'$ für das Differentialgleichungssystem (3.28) von gleicher Ordnung aber nur linear in kleinen Größen, d.h. "eine Größenordnung größer":

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \mathbf{T}' \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{w}_{tt} + O(\Delta^3) = \frac{\Delta t^2}{2} (c^2 \mathbf{w}_{xx} + \text{quadratisch} \\ &\text{in } u \text{ und Ableitungen von } c) + O(\Delta^3) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Wir erhalten also das folgende Ergebnis: Für eine isentrope eindimensionale Unterschallströmung ($u < c$) mit relativ geringen Dichteänderungen ist ein charakteristisches Differenzenverfahren gegenüber einem gewöhnlichen Differenzenverfahren nicht nur durch die Unbedingtheit in der Wahl des Zeitschrittes sondern auch durch die Größe des Truncationerrors im Vorteil.

Bei einer zweidimensionalen isentropen Strömung liegen die Verhältnisse nicht so günstig, hier kompensieren sich weder beim charakteristischen noch beim normalen Verfahren die zweiten Ableitungen im Truncationerror erster Ordnung. Es ergibt sich für das (4.11) (ohne CORIOLISKraft) analoge charakteristische Verfahren $\mathbb{I}$:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \mathbb{I} \cdot w(\mathbf{x}, t) = \Delta t^2 c^2 \left\{ \begin{pmatrix} -a^2 + 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 + 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix} \cdot w_{xx} \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \cdot w_{xy} + \begin{pmatrix} -a^2 + 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 + 0.5 \end{pmatrix} \cdot w_{yy} + \begin{pmatrix} \text{quadratisch} \\ \text{in } w_x \text{ und } w_y \end{pmatrix} \right\} \\ + O(\Delta x^2) + O(\Delta t^3), \quad (6.3) \end{aligned}$$

für das (4.3) analoge gewöhnliche Differenzenverfahren $\mathbb{I}'$ (mit $r = \Delta t / \Delta x$):

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \mathbb{I}' \cdot w(\mathbf{x}, t) = \frac{\Delta t^2}{2} \left\{ \begin{pmatrix} u^2 + c^2 - 0.5 r^2 & 2uc & 0 \\ 2uc & u^2 + c^2 - 0.5 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & u^2 - 0.5 r^2 \end{pmatrix} \cdot w_{xx} \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} 2uv & 2vc & 2uc \\ 2vc & 2uv & c^2 \\ 2uc & c^2 & 2uv \end{pmatrix} \cdot w_{xy} + \begin{pmatrix} v^2 + c^2 - 0.5 r^2 & 0 & 2vc \\ 0 & v^2 - 0.5 r^2 & 0 \\ 2vc & 0 & v^2 + c^2 - 0.5 r^2 \end{pmatrix} \cdot w_{yy} \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} \text{quadratisch in } w_x \text{ und } w_y \end{pmatrix} \right\} + O(\Delta t^3). \quad (6.4) \end{aligned}$$

Hier läge also der Vorteil des charakteristischen Verfahrens gegenüber dem normalen Verfahren nur in der Freiheit in der Wahl des Zeitschrittes, der Nachteil des größeren Rechenaufwandes für den Einzelschritt (Berücksichtigung von 16 Punkten gegenüber 4 Punkten) müßte hiergegen im Einzelfalle abgewogen werden.

Es erhebt sich nun die Frage, ob es nicht möglich sein könnte, den Truncationerror des charakteristischen Verfahrens zu verbessern. Ein Weg, welcher hierfür denkbar erscheint, soll zum Abschluß kurz skizziert werden, wobei das schon bewährte Konstruktionsprinzip angewandt werden soll.

Wir betrachten wieder die Gleichungen (4.1) (zur Vereinfachung ohne den CORIOLIS-term) in der Form

$$\frac{dw}{dt} = A \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + B \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \quad (6.5)$$

Für das System

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \bar{A} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{B} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \quad (6.6)$$

($\bar{A}$, $\bar{B}$ seien die konstanten Analoga zu A , B)

stellen wir ein normales Differenzenverfahren mit einem Truncationerror zweiter Ordnung auf. LAX und WENDROFF haben in [13], pp. 388 - 389, ein 9 - Punkte - Verfahren angegeben, welches dieses leistet, sie haben außerdem eine Stabilitätsbedingung der Form

$$\Delta t / \Delta x \leq 1 / m\bar{c} \quad (m = \text{const, von der Größenordnung } 1)$$

berechnet. Dieses Kriterium deuten wir wieder um als eine Vorschrift, bei beliebigem Δx und beliebigem Δt die für ein charakteristisches Verfahren zu verwendenden Punkte in einem Abstand $a m\bar{c} \Delta t$ ($a \geq 1$) anstelle Δx um den Punkt (x, t) anzunehmen. Die Funktionswerte w an diesen Punkten sind wieder linear aus den Funktionswerten der benachbarten Gitterpunkte zu interpolieren. Wegen

$$\hat{w} = w + O(\Delta x^2)$$

ergibt sich dann ein charakteristisches Verfahren $\mathbb{T}$ für (6.6) mit dem Fehler

$$w(x, t + \Delta t) - \mathbb{T} \cdot w(x, t) = O(\Delta x^2) + O(\Delta t^3) \\ (w \text{ exakte Lösung von (6.6)}).$$

Postieren wir jetzt die 9 Punkte nicht um x sondern um

$$x - (\bar{u} e_1 + \bar{v} e_2) \Delta t,$$

so erhalten wir ganz analog zu dem Vorgehen in Kapitel 4 ein charakteristi-

sches Verfahren T_1 , welches das System

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \right) w = \bar{A} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{B} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \quad (6.7)$$

mit dem Fehler

$$w(x, t + \Delta t) - T_1 \cdot w(x, t) = O(\Delta x^2) + O(\Delta t^3) \quad (6.8)$$

(w exakte Lösung von (6.7))

erfüllt.

Nehmen wir jetzt die Faktoren $\bar{u}, \bar{v}, \bar{c}$ in (6.7) und T_1 als variabel an, gehen wir also zum System (6.5) über, so ergibt die Entwicklung von

$$T_1 \cdot w(x, t) \quad (w \text{ exakte Lösung von (6.5)})$$

denselben algebraischen Ausdruck in u, v, c und den Ableitungen von w wie in (6.8) als Funktion von $\bar{u}, \bar{v}, \bar{c}$ und den Ableitungen von w . Es ändert sich nur in der Entwicklung von

$$w(x, t + \Delta t) = w(x, t) + \Delta t \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + O(\Delta t^3)$$

algebraisch das Glied $\frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ gegenüber (6.8); während dort die zweiten Zeitableitungen von w bei konstanten $\bar{A}, \bar{B}, \bar{u}, \bar{v}$ genommen worden waren, kommen jetzt noch als Faktoren von Δt^2 Glieder der Form

$$w_t \cdot w_x, w_t \cdot w_y, w_x \cdot w_x, w_x \cdot w_y, w_y \cdot w_y$$

hinzu. Vermöge der Gleichungen (6.5) sind dies aber quadratische Formen in ersten räumlichen Ableitungen von w .

Es ergibt sich also für das Differenzenverfahren T_1 ein Fehler

$$w(x, t + \Delta t) - T_1 \cdot w(x, t) = O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2),$$

wobei $O(\Delta t^2)$ eine quadratische Form in ersten Ableitungen von w ist und somit denselben Vorzug aufweist wie der Fehler im eindimensionalen Falle.

Bezahlen müssen wir allerdings diese Fehlerverkleinerung (z. B. bei großräumigen atmosphärischen Strömungen) mit einer Erhöhung der Zahl der zu berücksichtigenden Gitterpunkte von 16 auf 36. Auch hier müßten im Einzelfalle Vorteile und Nachteile der beiden zur Diskussion stehenden charakteristischen Verfahren gegeneinander abgewogen werden.

7. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Wir haben in dieser Arbeit ein unbedingt konvergentes Charakteristikenverfahren für eindimensionale quasilineare hyperbolische Differentialgleichungssysteme angegeben. Danach haben wir eine Vorschrift entwickelt, wie man auch bei zwei- und mehrdimensionalen Problemen auf der Charakteristikenidee fußend unbedingt konvergente Differenzenverfahren entwickeln könnte. Im Falle der linearisierten Gleichungen einer zweidimensionalen isentropen Strömung haben wir, einer Theorie von K. O. FRIEDRICHS folgend, Konsistenz, unbedingte Konvergenz und unbedingte Stabilität eines solchen Verfahrens nachweisen können. Unbeschadet eines noch ausstehenden Beweises haben wir die Erweiterung auf den nichtlinearen Fall unterstellt und hierfür den Truncationerror untersucht. Es ergab sich ein Ausblick auf eine interessante Möglichkeit, für Strömungen vom Typ der großräumigen atmosphärischen Bewegungen einen besonders kleinen Fehler erster Ordnung zu erzielen. Viele Fragen blieben offen bzw. wurden gar nicht erwähnt, wie z. B. das Problem einer Berücksichtigung von Randbedingungen. Ich hoffe aber, daß es mir gelungen ist, meine Überzeugung mitzuteilen, daß hier ein lohnendes Feld für weitere Untersuchungen vorliegt.

Zum Schluß möchte ich Herrn Prof. Dr. H. FORTAK für Anregung und Betreuung dieser Arbeit danken sowie für seine großzügige Unterstützung bei ersten numerischen Experimenten, welche die unbedingte Konvergenz des Charakteristikenverfahrens für eine eindimensionale isentrope Strömung bestätigt haben.

8. ANHANG

Wir tragen hier den wichtigen Beweis dafür nach, daß die in (4.14) definierten Funktionen $\sigma_{ij}^1(\mathbf{x}, t)$ im Intervall $0 \leq t \leq T$ gleichmäßig LIPSCHITZ stetig von $\mathbf{x}$ abhängen. Bezeichnungen und Definitionen seien dieselben wie in Kapitel 4.2.

Aus der gleichmäßigen LIPSCHITZ stetigkeit der Funktionen $\bar{u}, \bar{v}, \bar{c}$ folgt gemäß (4.15) die gleichmäßige LIPSCHITZ stetigkeit der Funktionen $f_i^1(\mathbf{x}, t)$. Sei K_f eine gemeinsame LIPSCHITZ konstante der f_i^1 :

$$|f_i^1(\mathbf{x}_1, t) - f_i^1(\mathbf{x}_2, t)| < K_f |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \quad \text{für } 0 \leq t \leq T \quad (8.1) \\ \text{und alle } i, t.$$

Dann folgt für konstantes m :

$$|f_i^1(\mathbf{x}_2, t) - m| - K_f |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \leq |f_i^1(\mathbf{x}_1, t) - m| \leq |f_i^1(\mathbf{x}_2, t) - m| \quad (8.2) \\ + K_f |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$$

Nach Definition (4.14) der $\sigma_{ij}^1(\mathbf{x}, t)$ gibt es für die Differenz $\sigma_{ij}^1(\mathbf{x}_1, t) - \sigma_{ij}^1(\mathbf{x}_2, t)$ die folgenden vier Möglichkeiten:

$$\sigma_{ij}^1(\mathbf{x}_1, t) - \sigma_{ij}^1(\mathbf{x}_2, t) =$$

$$(a) \quad (1 - |f_1^1(\mathbf{x}_1, t) - i|)(1 - |f_2^1(\mathbf{x}_1, t) - j|) - (1 - |f_1^1(\mathbf{x}_2, t) - i|)(1 - |f_2^1(\mathbf{x}_2, t) - j|) \\ \text{für } |f_1^1(\mathbf{x}_1, t) - i| < 1 \wedge |f_2^1(\mathbf{x}_1, t) - j| < 1 \\ \wedge |f_1^1(\mathbf{x}_2, t) - i| < 1 \wedge |f_2^1(\mathbf{x}_2, t) - j| < 1.$$

$$(b) \quad (1 - |f_1^1(\mathbf{x}_1, t) - i|)(1 - |f_2^1(\mathbf{x}_1, t) - j|) \\ \text{für } |f_1^1(\mathbf{x}_1, t) - i| < 1 \wedge |f_2^1(\mathbf{x}_1, t) - j| < 1 \\ \wedge [|f_1^1(\mathbf{x}_2, t) - i| \geq 1 \vee |f_2^1(\mathbf{x}_2, t) - j| \geq 1].$$

$$(c) \quad -(1 - |f_1^1(\mathbf{x}_2, t) - i|)(1 - |f_2^1(\mathbf{x}_2, t) - j|) \\ \text{für } |f_1^1(\mathbf{x}_2, t) - i| < 1 \wedge |f_2^1(\mathbf{x}_2, t) - j| < 1 \\ \wedge [|f_1^1(\mathbf{x}_1, t) - i| \geq 1 \vee |f_2^1(\mathbf{x}_1, t) - j| \geq 1].$$

$$(d) \quad 0 \quad \text{sonst.}$$

Wir diskutieren die vier Möglichkeiten der Reihe nach durch:

(a) Sei o. B. d. A. $\sigma_{ij}^1(\mathbf{x}_1, t) \geq \sigma_{ij}^1(\mathbf{x}_2, t)$.

Dann folgt unter Verwendung von (8.1), (8.2) und den Bedingungen für (a):

$$\begin{aligned} |\sigma_{ij}^1(\mathbf{x}_1, t) - \sigma_{ij}^1(\mathbf{x}_2, t)| &= \sigma_{ij}^1(\mathbf{x}_1, t) - \sigma_{ij}^1(\mathbf{x}_2, t) \\ &\leq (1 - |f_1^1(\mathbf{x}_2, t) - i| + K_f |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|)(1 - |f_2^1(\mathbf{x}_1, t) - j|) - (1 - |f_1^1(\mathbf{x}_2, t) - i|)(1 - |f_2^1(\mathbf{x}_2, t) - j|) \\ &= (1 - |f_1^1(\mathbf{x}_2, t) - i|)(|f_2^1(\mathbf{x}_2, t) - j| - |f_2^1(\mathbf{x}_1, t) - j|) + K_f |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| (1 - |f_2^1(\mathbf{x}_1, t) - j|) \\ &\leq K_f |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \{1 - |f_1^1(\mathbf{x}_2, t) - i| + 1 - |f_2^1(\mathbf{x}_1, t) - j|\} < 2K_f |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \end{aligned}$$

(b) Sei o. B. d. A. $|f_1^1(\mathbf{x}_2, t) - i| \geq 1$, dann folgt:

$$\begin{aligned} |\sigma_{ij}^1(\mathbf{x}_1, t) - \sigma_{ij}^1(\mathbf{x}_2, t)| &= (1 - |f_1^1(\mathbf{x}_1, t) - i|)(1 - |f_2^1(\mathbf{x}_1, t) - j|) \\ &\leq (|f_1^1(\mathbf{x}_2, t) - i| - |f_1^1(\mathbf{x}_1, t) - i|)(1 - |f_2^1(\mathbf{x}_1, t) - j|) \\ &< |f_1^1(\mathbf{x}_2, t) - i| - |f_1^1(\mathbf{x}_1, t) - i| < K_f |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \end{aligned}$$

(c) Sei o. B. d. A. $|f_1^1(\mathbf{x}_1, t) - i| > 1$, dann folgt:

$$\begin{aligned} |\sigma_{ij}^1(\mathbf{x}_1, t) - \sigma_{ij}^1(\mathbf{x}_2, t)| &= (1 - |f_1^1(\mathbf{x}_2, t) - i|)(1 - |f_2^1(\mathbf{x}_2, t) - j|) \\ &\leq (|f_1^1(\mathbf{x}_1, t) - i| - |f_1^1(\mathbf{x}_2, t) - i|)(1 - |f_2^1(\mathbf{x}_2, t) - j|) \\ &< |f_1^1(\mathbf{x}_1, t) - i| - |f_1^1(\mathbf{x}_2, t) - i| < K_f |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \end{aligned}$$

(d) $|\sigma_{ij}^1(\mathbf{x}_1, t) - \sigma_{ij}^1(\mathbf{x}_2, t)| = 0$

In jedem Falle gilt die Abschätzung:

$$|\sigma_{ij}^1(\mathbf{x}_1, t) - \sigma_{ij}^1(\mathbf{x}_2, t)| < 2K_f |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|,$$

die $\sigma_{ij}^1(\mathbf{x}, t)$ sind also im Intervall $0 \leq t \leq T$ gleichmäßig LIPSCHITZ-stetig mit einer LIPSCHITZkonstanten

$$K_j = 2K_f.$$

LITERATUR

- [1] COURANT, R.
FRIEDRICHS, K. O.
LEWY, H. Über die partiellen Differenzengleichungen der
mathematischen Physik
Math. Ann. 100 (1928), 32-74
- [2] LAX, P. D.
RICHTMYER, R. D. Survey of the Stability of Linear Finite
Difference Equations
Comm. Pure Appl. Math. 9 (1956), 267-293
- [3] LAX, P. D. Differential Equations, Difference Equations
and Matrix Theory
Comm. Pure Appl. Math. 11 (1958), 175-194
- [4] COURANT, R.
ISAACSON, E.
REES, M. On the Solution of Nonlinear Hyperbolic
Differential Equations by Finite Differences
Comm. Pure Appl. Math. 5 (1952), 243-255
- [5] KELLER, H. B. On the Solution of Semi-Linear Hyperbolic
Systems by Unconditionally Stable Difference
Methods
Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 447-456
- [6] KELLER, H. B.
THOMEE, V. Unconditionally Stable Difference Methods for
Mixed Problems for Quasi-Linear Hyperbolic
Systems in Two Dimensions
Comm. Pure Appl. Math. 15 (1962), 63-73
- [7] COURANT, R. Cauchy's Problem for Hyperbolic Quasi-Linear
Systems of First Order Partial Differential
Equations in Two Independent Variables
Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 257-265
- [8] FRIEDRICHS, K. O. Symmetric Hyperbolic Linear Differential
Equations
Comm. Pure Appl. Math. 7 (1954), 345-392
- [9] RICHTMYER, R. D.
MORTON, K. W. Difference Methods for Initial-Value Problems
2nd Edition, Interscience Publishers,
New York-London-Sydney, 1967
- [10] HINKELMANN, K.
SCHWARZENBERGER, R. Charakteristikenverfahren in der numerischen
Wettervorhersage
Ber. Dt. Wetterdienst 2 (1954), Nr. 14
- [11] SAUER, R. Differenzenverfahren für hyperbolische Anfangs-
wertprobleme bei mehr als zwei unabhängigen
Veränderlichen mit Hilfe von Nebencharakteri-
stiken
Num. Mathematik 5 (1963), 55-67

- [12] STRANG, W. G. Accurate Partial Difference Methods II:
Nonlinear Problems
Num. Mathematik 6 (1964), 37-46
- [13] LAX, P. D. Difference Schemes for Hyperbolic Equations
WENDROFF, B. with High Order of Accuracy
Comm. Pure Appl. Math. 17 (1964), 381-398
- [14] SCHÄTZ, R. Über optimale Charakteristikenverfahren bei
mehr als zwei unabhängigen Variablen
Dissertation TH München, 1961
- [15] COLLATZ, L. Funktionalanalysis und Numerische Mathematik
Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg,
1964

VERZEICHNIS DER VERWENDETEN SYMBOLE

$a, b, c, \dots; A, B, C, \dots$	Skalare
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots$	Vektoren
$\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$	Vektoren (Näherungen von $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$)
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots, \mathbf{H}$	Dyaden (Tensoren 2-ter Stufe)
$\mathbf{E}$	Einheitsdyade
$\cdot$	Skalarprodukt
$ \mathbf{v} $	Betrag des Vektors $\mathbf{v}$
$\ \mathbf{v}\ \equiv v, \ \mathbf{A}\ $	Norm von $\mathbf{v}$ (Vektor) bzw. $\mathbf{A}$ (Dyade) (s.Seite 4)
$[a]$	kleinste ganze Zahl $\leq a$
$\mathbf{T}$	Differenzenoperator

Peter Joachim Strauch
1 Berlin 46
Hünefeldzeile 9

Berlin, d. 22.1.68

Lebenslauf

Am 12.10.1934 wurde ich als Sohn des Studienrates Dr. Johannes Strauch und seiner Ehefrau Hildegard, geb. Lehmann, in Aue/Sachsen geboren. Meine Kindheit verlebte ich in Schwarzenberg/Erzgebirge. Nach dem Besuch der Volksschule (1941-1945) und der Oberschule (ab Herbst 1945) in Schwarzenberg wurde ich zu Ostern 1946 in den Dresdner Kreuzchor aufgenommen, verbunden mit dem Eintritt in das Alumnat des Kreuzchors und dem Wechsel zur Kreuzschule Dresden, an der ich 1952 das Abitur ablegte (Humanistischer Zweig).

Im Herbstsemester 1952 begann ich, an der Universität Leipzig Physik und Mathematik zu studieren, u. a. bei den Professoren H. Beckert, G. Hertz, W. Ilberg, E. Kähler, B. Kockel, A. Lösche und W. Schnee. Nach dem Vordiplom ging ich im Wintersemester 1955/56 an die Freie Universität Berlin, wo ich im Sommersemester 1961 mit einer theoretischen Arbeit bei Prof. Ludwig mit dem Diplom in Physik abschloß. (Thema der Arbeit: "Über einige Theorien der Vielfacherzeugung von Teilchen bei hochenergetischen Nukleonenstößen".) Meine akademischen Lehrer während dieser Zeit waren die Professoren G. Ludwig (Theoretische Physik), R. Honerjäger (Höhere Experimentalphysik), F. W. Levy (Mathematik) sowie K. Just, H. Kümmel, H. Pachale, J. Nitsche und G. Manecke.

Im April 1962 begann meine wissenschaftliche Mitarbeit am Institut für Theoretische Meteorologie der FU (Direktor Prof. Dr. H. Fortak). Sie führte unter der Anleitung von Prof. Fortak zur Beschäftigung mit Problemen der Physik der Atmosphäre und schloß die traditionellen Assistentenaufgaben (Übungen, Seminare) ein. Daneben hörte ich Vorlesungen bei den Professoren K. P. Grotemeyer, W. Theis, J. Eichler und W. Weidlich.

Die vorliegende Arbeit verdankt ihr Entstehen einer Anregung von Prof. Fortak.

